

Corrigé pédagogique

Baccalauréat 2026 – spécialité mathématiques – Métropole, 16 juin

Corrigé pédagogique original, indépendant et non officiel. Ce document donne les réponses et leurs justifications dans l'ordre du sujet ministériel accessible séparément. Les énoncés et les illustrations officiels ne sont pas reproduits. Les dessins ci-dessous sont des constructions originales destinées à expliquer les solutions.

Exercice 1 : probabilités et variables aléatoires

Partie A, question 1a

La donnée globale donne directement $P(C) = 0,75$.

Partie A, question 1b

Les quatre pointillés de l'arbre se complètent par $P(V) = 0,30$, $P(\bar{V}) = 0,70$, $P_V(C) = 0,80$ et $P_V(\bar{C}) = 0,20$. Les branches issues de $\bar{V}$ ne font pas partie de ces quatre pointillés ; elles seront déterminées à la question 4.

Partie A, question 2

La règle du produit sur une branche de l'arbre donne

$$P(V \cap C) = P(V)P_V(C) = 0,30 \times 0,80 = \boxed{0,24}.$$

Partie A, question 3

Comme $P(C) > 0$,

$$P_C(V) = \frac{P(V \cap C)}{P(C)} = \frac{0,24}{0,75} = \boxed{0,32}.$$

Parmi les familles ayant réservé une cabine, 32 % ont aussi réservé un emplacement.

Partie A, question 4

Les événements V et $\bar{V}$ forment une partition. Par probabilités totales,

$$0,75 = 0,24 + 0,70P_{\bar{V}}(C).$$

Donc $P_{\bar{V}}(C) = \frac{0,51}{0,70} = \frac{51}{70} \simeq \boxed{0,73}$. Environ 73 % des familles sans emplacement pour véhicule réservent une cabine. La branche contraire vaut $19/70$.

Partie B, question 1

La formule de l'espérance donne

$$E(X) = 0 \times 0,19 + 70 \times 0,06 + 100 \times 0,51 + 170 \times 0,24 = 4,2 + 51 + 40,8 = \boxed{96}.$$

Puis

$$E(X^2) = 70^2 \times 0,06 + 100^2 \times 0,51 + 170^2 \times 0,24 = 294 + 5100 + 6936 = 12330.$$

Par $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, on obtient $V(X) = 12330 - 9216 = \boxed{3114}$.

Partie B, question 2a

Une remise de 40 % laisse payer 60 % de la somme initiale : $Z = (1 - 0,40)(X + Y) = 0,6(X + Y)$.

Partie B, question 2b

La linéarité de l'espérance donne $E(Z) = 0,6(96 + 104) = \boxed{120}$. L'indépendance de X et Y permet d'additionner leurs variances :

$$V(Z) = 0,6^2(V(X) + V(Y)) = 0,36(3114 + 1686) = \boxed{1728}.$$

L'indépendance est nécessaire ici pour la variance, mais pas pour l'espérance.

Partie B, question 3a

Les Z_i ont même espérance et sont indépendantes. Ainsi

$$E(M_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(Z_i) = 120, \quad V(M_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(Z_i) = \frac{1728}{n}.$$

Partie B, question 3b

L'événement demandé est $|M_n - 120| < 6$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

$$P(|M_n - 120| \geq 6) \leq \frac{1728/n}{6^2} = \frac{48}{n},$$

puis $P(114 < M_n < 126) \geq 1 - 48/n$. Pour que cette borne soit au moins 0,85, il faut

$$\frac{48}{n} \leq 0,15 \quad \Longleftrightarrow \quad n \geq 320.$$

Le plus petit entier fourni par cette inégalité est $\boxed{320}$. Pour un échantillon d'au moins 320 familles, la probabilité que la dépense moyenne après remise soit strictement comprise entre 114 et 126 euros est au moins 85 %. Il s'agit d'une garantie donnée par la borne, pas de la probabilité exacte.

Exercice 2 : vrai ou faux**Question 1a : affirmation 1 vraie**

Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; -5)$, qui est aussi un vecteur normal de (P) . Le plan est donc orthogonal à cette droite. Le milieu est $I(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$, et

$$-\frac{5}{2} + \frac{1}{2} - 5\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 0.$$

Ainsi $I \in (P)$: les deux propriétés annoncées sont vérifiées.

Question 1b : affirmation 2 fausse

Une représentation de (AB) est $(x; y; z) = (3 - s; s; 2 - 5s)$, $s \in \mathbb{R}$. Un point commun avec (d) imposerait $t = 3 - s$ et $-1,5 - t = s$. En substituant, on aurait $-1,5 - 3 + s = s$, donc $-4,5 = 0$, impossible. Les droites ne sont pas sécantes. Leurs vecteurs directeurs $(1; -1; -2)$ et $(-1; 1; -5)$ ne sont pas colinéaires ; ce sont donc des droites gauches.

Question 1c : affirmation 3 vraie

Les vecteurs issus de C sont $\overrightarrow{CA} = (1,5; 3; 3)$ et $\overrightarrow{CB} = (0,5; 4; -2)$. Leur produit scalaire vaut

$$1,5 \times 0,5 + 3 \times 4 + 3 \times (-2) = 6,75.$$

Les deux normes valent $\sqrt{20,25} = 4,5$. Par conséquent

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{6,75}{4,5^2} = \frac{1}{3}, \quad \widehat{ACB} = \arccos(1/3) \simeq \boxed{70,5^\circ}.$$

Question 2 : affirmation 4 vraie

Pour A, l'ordre compte et les symboles sont distincts : il existe $8 \times 7 \times 6 = 336$ codes. Clotilde a donc une chance sur 336. Pour B, seul l'ensemble de quatre symboles compte :

$$\binom{8}{4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70.$$

Titouan a une chance sur 70 ; comme $1/70 > 1/336$, sa probabilité de succès est supérieure. On ne compte pas les permutations d'un même ensemble comme des codes différents pour B.

Exercice 3 : chauffage et refroidissement**Partie A, question 1**

Pour $y' = -0,035y + 0,91$, la solution constante particulière vaut $0,91/0,035 = 26$. Toutes les solutions sont donc

$$y(t) = 26 + Ke^{-0,035t}, \quad K \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Partie A, question 2

$T(0) = 26 + K = 18$ impose $K = -8$. Ainsi $T(t) = 26 - 8e^{-0,035t}$.

Partie A, question 3

On résout

$$26 - 8e^{-0,035t} = 20 \iff e^{-0,035t} = \frac{3}{4} \iff t = \frac{-\ln(3/4)}{0,035} \simeq 8,21949.$$

t étant exprimé en dizaines de minutes, la durée vaut environ 82,1949 minutes, soit $\boxed{1 \text{ h } 22 \text{ min}}$ après arrondi à la minute.

Partie A, question 4

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive, donc $T(t) < 26 < 28$. La température ne peut pas dépasser 28°C dans ce modèle, même si le chauffage reste actif. Elle tend vers 26°C sans l'atteindre à temps fini.

Partie B, question 1

$$u_1 = 0,965 \times 20 + 0,35 + 0,07e^0 = 19,3 + 0,35 + 0,07 = \boxed{19,72}.$$

Partie B, question 2

Initialisation : $u_0 = 20 > 10$. Supposons $u_n > 10$. Comme $0,965 > 0$ et $e^{-0,1n} > 0$,

$$u_{n+1} > 0,965 \times 10 + 0,35 + 0,07e^{-0,1n} = 10 + 0,07e^{-0,1n} > 10.$$

L'hérédité est établie. Par récurrence, $u_n > 10$ pour tout entier $n \geq 0$.

Partie B, question 3

La suite est décroissante par admission et minorée par 10 d'après la question précédente. Le théorème de convergence monotone assure qu'elle converge vers une limite réelle $\ell \geq 10$.

Partie B, question 4a

La suite décalée u_{n+1} tend aussi vers ℓ , et $e^{-0,1n} \rightarrow 0$. Le passage à la limite dans la relation de récurrence donne $\ell = 0,965\ell + 0,35$.

Partie B, question 4b

$0,035\ell = 0,35$, donc $\boxed{\ell = 10}$. Si le refroidissement se poursuivait sans reprise du chauffage, la température tendrait vers 10°C . En fonctionnement normal, ce prolongement théorique est interrompu par le redémarrage.

Partie B, question 5a

Une version complète est :

```
from math import exp

def marche():
    n = 0
    u = 20
    while u > 18:
        u = 0.965*u + 0.35 + 0.07*exp(-0.1*n)
        n = n + 1
    return n
```

La ligne actualisant u utilise la valeur courante de n ; on incrémente ensuite n . Le test strict laisse s'arrêter dès que la température est inférieure ou égale à 18.

Partie B, question 5b

L'itération numérique donne $u_7 \simeq 18,12167 > 18$ et $u_8 \simeq 17,87217 \leq 18$. Comme la suite est décroissante, le premier rang convenable est $\boxed{8}$. Le chauffage redémarre après huit dizaines de minutes, soit 80 minutes de refroidissement.

Exercice 4 : logarithme et aire**Partie A, question 1**

La courbe passe par $A(0; 1)$, donc $f(0) = 1$. Or $\ln 1 = 0$ donne $f(0) = a$. Ainsi $\boxed{a = 1}$.

Partie A, question 2a

La tangente tracée passe par $(0; 1)$ et $(1; 5)$, lus sur les graduations. Son coefficient directeur vaut $(5 - 1)/(1 - 0) = 4$. Donc $\boxed{f'(0) = 4}$.

Partie A, question 2b

Au voisinage de l'abscisse 1, la courbe est tournée vers le bas ; les pentes des tangentes diminuent. La lecture graphique conduit à $\boxed{f''(1) < 0}$.

Partie A, question 3a

La dérivée de $\ln(x + 1)$ est $1/(x + 1)$. Par la règle du quotient,

$$f'(x) = b \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{b(1 - \ln(x+1))}{(x+1)^2}.$$

Partie A, question 3b

En $x = 0$, cette formule donne $f'(0) = b$. La lecture précédente impose donc $\boxed{b = 4}$.

Partie B, question 1

Posons $u = x + 1$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow +\infty$ et $\ln u/u \rightarrow 0$ par croissance comparée. Ainsi $f(x) \rightarrow 1$: la droite $y = 1$ est une asymptote horizontale en $+\infty$.

Partie B, question 2

Sur le domaine $x > -1$, la stricte croissance de $\ln$ donne

$$1 - \ln(x + 1) > 0 \iff \ln(x + 1) < 1 \iff x + 1 < e.$$

L'ensemble solution est $\boxed{]-1; e - 1[}$.

Partie B, question 3

Le dénominateur de f' est strictement positif. La fonction est donc strictement croissante sur $]-1; e - 1]$, puis strictement décroissante sur $[e - 1; +\infty[$. Son maximum exact vaut

$$f(e - 1) = 1 + \frac{4}{e}.$$

Avec la limite en -1 admise et celle obtenue en $+\infty$, le tableau est :

x	-1	$e-1$	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1+4/e$	$\searrow$	1

Le dernier 1 est une limite, pas une valeur atteinte à l'infini.

Partie B, question 4

Comme $e - 1 < 2$, f est continue et strictement décroissante sur $[2; +\infty[$. On a $f(2) = 1 + \frac{4\ln 3}{3} > 1,5$, tandis que sa limite est $1 < 1,5$. Le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie donnent une unique solution α sur cet intervalle. Par dichotomie, $\alpha \simeq 25,09348548$; son arrondi au dixième est $\boxed{25,1}$. Par exemple, $f(25,09) > 1,5$ et $f(25,10) < 1,5$ encadrent cette solution.

Partie B, question 5a

La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln(x+1))^2$ a pour dérivée $\ln(x+1)/(x+1)$. Ainsi

$$\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \left[\frac{1}{2}(\ln(x+1))^2 \right]_0^2 = \boxed{\frac{1}{2}(\ln 3)^2}.$$

Partie B, question 5b

Sur $[0; 2]$, $\ln(x+1) \geq 0$, donc $f(x) \geq 1 > 0$. L'aire est bien l'intégrale de f , sans changement de signe :

$$\mathcal{A} = \int_0^2 f(x) dx = 2 + 4 \times \frac{1}{2}(\ln 3)^2 = \boxed{2 + 2(\ln 3)^2 \text{ unités d'aire}}.$$