Chapitre 01 – Cours

Arithmétique et calcul rationnel

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Utiliser les facteurs premiers
- Rendre une fraction irréductible
- Résoudre un partage maximal

Diviser avec ou sans reste

Définition – Division euclidienne

Pour un entier naturel a et un entier $b > 0$, la division euclidienne s'écrit

$$a = bq + r, \qquad 0 \leqslant r < b.$$

Les entiers q et r sont le quotient et le reste. Par exemple, $37 = 5 \times 7 + 2$: le quotient de 37 par 5 est 7 et le reste est 2. Le reste doit être strictement inférieur au diviseur.

Définition – Divisibilité et nombres premiers

Un entier positif d divise a lorsque le reste de la division de a par d est nul. Un nombre premier est un entier supérieur à 1 dont les seuls diviseurs positifs sont 1 et lui-même. Ainsi 2, 3, 5 et 7 sont premiers, mais 1 ne l'est pas.

Faire apparaître les facteurs communs

Propriété – Décomposition en facteurs premiers

Tout entier supérieur à 1 s'écrit comme un produit de nombres premiers. Pour construire ce produit, on effectue des divisions exactes successives par des nombres premiers jusqu'à obtenir 1. L'ordre des facteurs peut changer, mais les facteurs et leur nombre de répétitions sont les mêmes.

Exemple résolu – Rendre une fraction irréductible

On décompose les deux termes de $\frac{180}{252}$:

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5, \qquad 252 = 2^2 \times 3^2 \times 7.$$

Le facteur commun complet est $2^2 \times 3^2 = 36$. En divisant numérateur et dénominateur par 36, on obtient

$$\frac{180}{252} = \frac{5}{7}.$$

Les entiers 5 et 7 étant premiers entre eux, la fraction est irréductible. Pour calculer ensuite $\frac{5}{7} + \frac{1}{2}$, on prend le dénominateur commun 14 : le résultat est $\frac{10+7}{14} = \frac{17}{14}$.

Propriété – Calcul rationnel

Pour additionner des fractions, choisir un dénominateur commun. Pour multiplier, multiplier les numérateurs et les dénominateurs, en simplifiant les facteurs communs si possible. Diviser par une fraction non nulle revient à multiplier par son inverse. Les simplifications portent sur des produits : on ne supprime pas un terme d'une somme.

Trouver un partage maximal

Exemple résolu – Le plus grand nombre de lots

Une association possède 180 cahiers et 252 crayons. Elle veut faire le plus grand nombre de lots identiques en utilisant tout. Le nombre de lots doit diviser les deux stocks. Les décompositions précédentes montrent que le plus grand diviseur commun est 36. On prépare donc 36 lots, chacun contenant

$$180 \div 36 = 5 \text{ cahiers}, \qquad 252 \div 36 = 7 \text{ crayons}.$$

On contrôle : $36 \times 5 = 180$ et $36 \times 7 = 252$. Prendre seulement 18 lots serait possible, mais ne donnerait pas le nombre maximal demandé.

Lire les facteurs partagés

$$\begin{array}{rcccc} 180 = & \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{3} \quad 5 \\ 252 = & \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{3} \quad 7 \end{array}$$

Facteurs communs : $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$

Les nombres d'une même ligne sont multipliés. Le cadre rassemble exactement les facteurs présents dans les deux décompositions.

À retenir – Bilan

Le reste nul reconnaît une divisibilité. Les facteurs premiers permettent de simplifier une fraction et de chercher un partage maximal. Une fraction irréductible a un numérateur et un dénominateur sans diviseur commun supérieur à 1.