Chapitre 04 – Cours

Équations et produits nuls

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Résoudre des équations
- Utiliser la propriété du produit nul
- Valider un modèle dans son contexte

Résoudre une égalité

Définition – Solution d'une équation

Une solution est une valeur de l'inconnue qui rend les deux membres égaux. Résoudre consiste à trouver toutes les solutions. On conserve les solutions en ajoutant un même nombre aux deux membres, ou en multipliant les deux membres par un même nombre non nul. Une division par zéro est toujours interdite.

Exemple résolu – Une équation du premier degré

Résolvons $4(2x-1) = 3x+11$. On développe le membre de gauche : $8x-4 = 3x+11$. On soustrait $3x$ puis on ajoute 4 aux deux membres :

$$5x = 15, \qquad x = 3.$$

Le contrôle dans l'équation initiale donne $4(6-1) = 20$ et $9+11 = 20$. La valeur 3 est donc solution et les transformations effectuées montrent qu'il n'y en a pas d'autre.

Utiliser une forme factorisée

Propriété – Produit nul

Un produit de deux nombres est nul si et seulement si au moins l'un des facteurs est nul :

$$AB = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

Ainsi $(x-2)(3x+1) = 0$ donne $x = 2$ ou $x = -\frac{1}{3}$. Cette propriété s'applique à un produit égal à zéro ; elle ne s'applique pas directement à une somme, ni à un produit égal à 5.

Méthode – Obtenir un produit nul

Si une équation comporte un carré, regrouper d'abord tous les termes dans un membre pour obtenir zéro dans l'autre. Factoriser ensuite si possible. Résoudre séparément les équations obtenues en annulant chaque facteur. Ne pas diviser par une expression contenant x sans contrôler si elle peut être nulle : on risquerait de perdre une solution.

Résoudre puis respecter le contexte

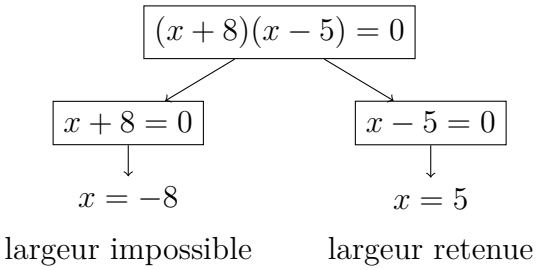
Exemple résolu – La largeur d'un rectangle

Un rectangle a une largeur x cm et une longueur $x+3$ cm. Son aire vaut 40 cm^2. Comme une largeur est positive, on cherche $x > 0$. L'équation est

$$x(x+3) = 40, \qquad x^2 + 3x - 40 = 0.$$

Or $(x+8)(x-5) = x^2 + 3x - 40$. La propriété du produit nul donne $x = -8$ ou $x = 5$. Seule la valeur 5 est positive. Le rectangle mesure donc 5 cm sur 8 cm, et son aire vaut bien $5 \times 8 = 40$ cm^2.

Organiser les deux possibilités



Les deux branches donnent les solutions de l'équation. Le contexte géométrique permet ensuite de sélectionner celle qui répond au problème.

Propriété – Cas particuliers

Une réduction peut aboutir à $0x = 0$: tous les nombres sont alors solutions de l'équation. Si elle aboutit à $0x = 5$, aucun nombre ne convient. Ces deux cas ne permettent pas une division finale par le coefficient de x, puisqu'il est nul.

À retenir – Bilan

Une équation du premier degré se résout en isolant l'inconnue. Une équation factorisée égale à zéro se résout en annulant chaque facteur. Vérifier les valeurs dans l'équation et conclure selon les contraintes du problème.