

Chapitre 08 – Cours

Théorème de Thalès et réciproque

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Reconnaître une configuration de Thalès
- Démontrer un parallélisme
- Relier rapports de longueurs et aires

Identifier les deux triangles

Propriété – Théorème de Thalès

Les points A, M, B sont alignés, les points A, N, C aussi, avec $A \neq B$, $A \neq C$ et $(MN) \parallel (BC)$. Dans une configuration emboîtée ou en papillon, on a

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Les longueurs sont positives et les côtés correspondants occupent la même place dans les rapports. On ne mélange pas un rapport petit/grand avec un rapport grand/petit.

Définition – Configuration emboîtée ou papillon

Dans la configuration emboîtée, M et B sont sur une même demi-droite d'origine A , comme N et C . Dans le papillon, A est entre M et B , et aussi entre N et C . Dans les deux cas, il faut vérifier les alignements et le parallélisme avant d'appliquer le théorème.

Exemple résolu – Calculer dans un papillon

On sait que A est entre M et B , entre N et C , et que $(MN) \parallel (BC)$. Les longueurs sont $AM = 3$ cm, $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm et $BC = 10$ cm. D'après Thalès, le rapport est $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, donc

$$AN = 8 \times \frac{1}{2} = 4 \text{ cm}, \quad MN = 10 \times \frac{1}{2} = 5 \text{ cm}.$$

Les triangles sont de part et d'autre de A , mais les rapports de longueurs restent positifs.

Démontrer un parallélisme

Propriété – Réciproque de Thalès

Si A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre, et si

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC},$$

alors $(MN) \parallel (BC)$. « Dans le même ordre » signifie que les deux alignements correspondent : par exemple, $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$. L'égalité des rapports ne remplace pas cette condition de position.

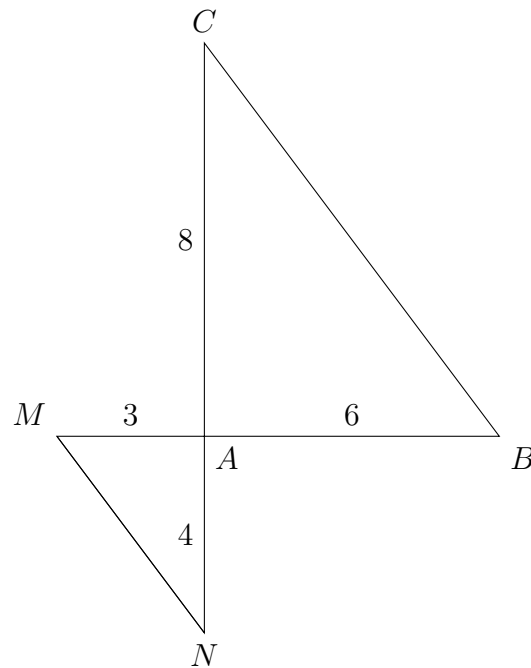
Exemple résolu – Vérifier puis comparer les aires

Dans le triangle ABC , $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$. On connaît $AB = 10$ cm, $AM = 6$ cm, $AC = 15$ cm et $AN = 9$ cm. On calcule séparément

$$\frac{AM}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \quad \frac{AN}{AC} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

Les rapports sont égaux et les points sont dans le même ordre : la réciproque donne $(MN) \parallel (BC)$. Le petit triangle est une réduction de rapport $\frac{3}{5}$. Si l'aire de ABC est 50 cm², celle de AMN vaut $50 \times (\frac{3}{5})^2 = 18$ cm².

Deux triangles en papillon



Ici, $BC = 10$ et $MN = 5$. Les segments $[MN]$ et $[BC]$ sont parallèles ; les droites (MB) et (NC) se croisent en A .

À retenir – Bilan

Thalès calcule une longueur à partir d'un parallélisme. Sa réciproque prouve un parallélisme à partir de rapports égaux et de positions vérifiées. Un rapport de longueurs k devient un rapport d'aires k^2 .
