

# Chapitre 10 – Cours

## Homothéties et transformations

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Décrire une homothétie
- Utiliser les transformations du plan
- Calculer les effets sur les aires

## Reconnaître les transformations usuelles

---

### Définition – Déplacements et symétries

Une translation déplace tous les points selon un même déplacement. Une rotation tourne les points autour d'un centre d'un angle donné, dans un sens précisé. Une symétrie axiale utilise une droite comme axe ; une symétrie centrale utilise un point comme centre. Ces transformations conservent les longueurs, les angles et les aires.

---

---

### Définition – Homothétie

Une homothétie possède un centre  $O$  et un rapport  $k$  non nul. Pour un point  $M \neq O$ , son image  $M'$  est alignée avec  $O$  et  $M$ , avec

$$OM' = |k| OM.$$

Si  $k > 0$ ,  $M'$  est sur la même demi-droite d'origine  $O$  que  $M$ . Si  $k < 0$ , il est sur la demi-droite opposée. Le centre  $O$  reste fixe.

---

## Comprendre le rapport

---

### Propriété – Agrandissement ou réduction

Si  $|k| > 1$ , les longueurs augmentent ; si  $0 < |k| < 1$ , elles diminuent. Pour  $k = 1$ , chaque point reste à sa place. Pour  $k = -1$ , on retrouve la symétrie centrale de centre  $O$ . Le signe indique le côté du centre, tandis que la valeur absolue indique le facteur appliqué aux longueurs.

---

---

**Exemple résolu – Construire avec un rapport négatif**

Le point  $M$  est à 3 cm de  $O$ . Par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $-2$ , son image  $M'$  est sur la droite  $(OM)$ , de l'autre côté de  $O$ , et

$$OM' = 2 \times 3 = 6 \text{ cm.}$$

Si un segment  $[MN]$  mesure 4 cm, son image  $[M'N']$  mesure  $2 \times 4 = 8$  cm. Le rapport négatif ne donne pas une longueur négative : il indique la position des images.

---

**Calculer les effets sur une figure**

---

**Propriété – Longueurs, angles et aires**

Une homothétie multiplie les longueurs et les périmètres par  $|k|$ , les aires par  $k^2$ . Elle conserve les mesures d'angles, l'alignement et le parallélisme. L'image d'une droite qui ne passe pas par le centre lui est parallèle. Un triangle et son image ont donc la même forme.

---

---

**Exemple résolu – Réduire un triangle**

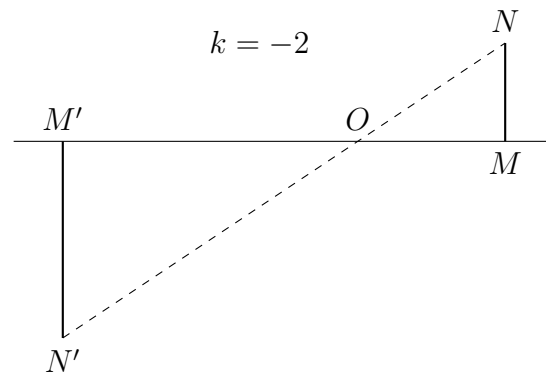
Un triangle a pour côtés 6, 8 et 10 cm. Son périmètre est 24 cm. Il est rectangle, car  $6^2 + 8^2 = 10^2$  ; son aire vaut  $\frac{6 \times 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$ . Une homothétie de rapport  $\frac{1}{2}$  donne des côtés 3, 4 et 5 cm. Son périmètre vaut  $24 \times \frac{1}{2} = 12$  cm, et son aire

$$24 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \text{ cm}^2.$$

La nouvelle aire n'est pas la moitié de l'ancienne : elle en est le quart.

---

## Voir un rapport négatif



Le centre est entre chaque point et son image. Le segment image est parallèle au segment initial et deux fois plus long.

---

### À retenir – Bilan

Pour une homothétie, identifier centre, signe du rapport et facteur de longueur. Les angles sont conservés, mais les longueurs ne le sont généralement pas. Les aires utilisent le carré du rapport, toujours positif.

---