

Chapitre 11 – Cours

Géométrie de l'espace et grandeurs

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Calculer volumes et aires
- Distinguer sphère et boule
- Exploiter agrandissements et réductions

Distinguer surface et volume

Définition – Sphère et boule

La sphère de centre O et de rayon $r > 0$ est l'ensemble des points situés à la distance r de O : c'est une surface. La boule correspond à l'intérieur et à cette surface : ses points sont à une distance de O inférieure ou égale à r . Un ballon fermé illustre une surface ; son espace intérieur illustre un volume.

Propriété – Aire de la sphère et volume de la boule

Pour un rayon r :

$$A = 4\pi r^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Si r est en centimètres, l'aire est en cm^2 et le volume en cm^3 . Le diamètre vaut $2r$: il faut donc le diviser par deux si la donnée fournie est un diamètre.

Calculer puis convertir

Exemple résolu – Une boule de rayon 3 cm

L'aire de sa surface vaut $4\pi \times 3^2 = 36\pi \text{ cm}^2$, soit environ $113,1 \text{ cm}^2$. Son volume vaut

$$V = \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 36\pi \text{ cm}^3 \approx 113,1 \text{ cm}^3.$$

Les valeurs numériques sont ici identiques, mais les grandeurs et les unités diffèrent. Comme $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$, le volume correspond à environ $113,1 \text{ mL}$. Ce rapprochement numérique est particulier au rayon choisi.

Réutiliser les formules des autres solides

Propriété – Base et hauteur

Pour un prisme droit ou un cylindre, $V = Bh$. Pour une pyramide ou un cône, $V = \frac{1}{3}Bh$. La lettre B représente l'aire de la base, et h la hauteur perpendiculaire au plan de cette base. Une face triangulaire de pyramide et la base de la pyramide sont des surfaces différentes : leur aire ne joue pas le même rôle dans la formule.

Propriété – Agrandissements et unités

Si toutes les longueurs d'un solide sont multipliées par $k > 0$, les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3 . De plus, $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$ et $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}$. Pour convertir un volume, tenir compte des trois dimensions : le facteur entre deux unités cubiques voisines est 1 000.

Exemple résolu – Deux cônes semblables

Un cône a un rayon de 4 cm et une hauteur de 9 cm. Son volume est

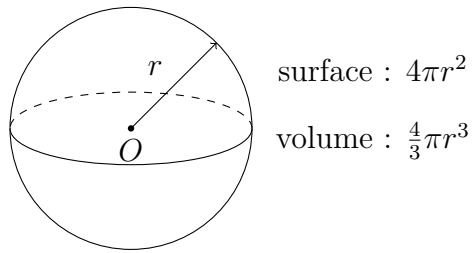
$$V = \frac{\pi \times 4^2 \times 9}{3} = 48\pi \text{ cm}^3.$$

On construit un cône en divisant toutes ses longueurs par 3. Son rayon vaut $\frac{4}{3}$ cm et sa hauteur vaut 3 cm. Son volume est celui du grand multiplié par $(\frac{1}{3})^3$:

$$V' = \frac{48\pi}{27} = \frac{16\pi}{9} \text{ cm}^3 \approx 5,59 \text{ cm}^3.$$

On obtient la même valeur en utilisant directement les nouvelles dimensions dans la formule du cône.

Le rayon d'une sphère



Le cercle et l'ellipse représentent une sphère en perspective ; le rayon rejoint le centre à un point de la surface.

À retenir – Bilan

Une aire mesure une surface ; un volume mesure l'espace occupé. Identifier le rayon et la hauteur avant d'appliquer une formule. Dans une réduction, utiliser le carré du rapport pour les aires et son cube pour les volumes.
