Chapitre 03 – Cours

Divisibilité et nombres premiers

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Décomposer en facteurs premiers
- Simplifier une fraction
- Organiser des partages sans reste

Reconnaître une divisibilité

Définition – Diviseur et multiple

Un entier positif d divise un entier naturel n si $n = d \times k$ pour un entier naturel k. On dit aussi que n est un multiple de d. Par exemple, $42 = 6 \times 7$: 6 et 7 sont des diviseurs de 42. Une division exacte laisse un reste nul.

Propriété – Critères utiles

Un entier est divisible par 2 si son dernier chiffre est pair ; par 5 s'il finit par 0 ou 5 ; par 10 s'il finit par 0. Il est divisible par 3, ou par 9, lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3, ou par 9. Ces critères permettent de choisir un premier diviseur sans effectuer toutes les divisions possibles.

Décomposer un entier

Définition – Nombre premier

Un nombre premier est un entier strictement supérieur à 1 qui possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même. Les premiers nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11 et 13. Le nombre 1 n'est pas premier ; 2 est le seul nombre premier pair.

Méthode – Chercher les facteurs premiers

Diviser le nombre par un nombre premier qui le divise, puis recommencer avec le quotient obtenu. On s'arrête au quotient 1. Le produit de tous les diviseurs premiers utilisés redonne le nombre de départ. Une répétition d'un facteur peut être écrite avec une puissance.

Exemple résolu – Décomposer puis simplifier

Décomposons 84 et 126 :

$$84 = 2 \times 42 = 2^2 \times 21 = 2^2 \times 3 \times 7,$$

$$126 = 2 \times 63 = 2 \times 3^2 \times 7.$$

La fraction se simplifie en supprimant les facteurs communs du numérateur et du dénominateur :

$$\frac{84}{126} = \frac{2 \times (2 \times 3 \times 7)}{3 \times (2 \times 3 \times 7)} = \frac{2}{3}.$$

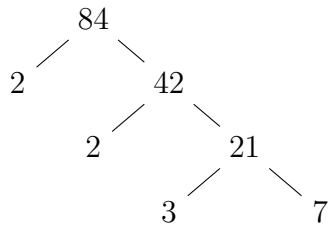
Les entiers 2 et 3 n'ont aucun diviseur commun autre que 1 : cette dernière fraction est irréductible.

Partager sans reste

Exemple résolu – Des sachets identiques

On dispose de 84 billes blanches et de 126 billes noires. On veut le plus grand nombre possible de sachets identiques, en utilisant toutes les billes. Ce nombre doit diviser 84 et 126. Les facteurs premiers communs sont 2, 3 et 7 : leur produit vaut 42. On peut donc préparer 42 sachets contenant chacun $84 \div 42 = 2$ billes blanches et $126 \div 42 = 3$ billes noires. Un nombre supérieur ne peut pas diviser les deux stocks : on a pris tous leurs facteurs premiers communs.

Un arbre de facteurs



Chaque embranchement est un produit : $84 = 2 \times 42$, puis $42 = 2 \times 21$. Les feuilles sont toutes des nombres premiers.

À retenir – Bilan

La décomposition fait apparaître les facteurs communs. Elle sert à rendre une fraction irréductible et à organiser un partage maximal. Pour contrôler un partage, multiplier le nombre de sachets par le contenu d'un sachet et retrouver chaque stock.