

Chapitre 02 – Corrections

Structures algébriques : groupes, anneaux et corps

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Groupe additif

Le neutre est $\bar{0}$. L'opposé de $\bar{2}$ est $\bar{1}$, car leur somme est nulle modulo 3. Le groupe est commutatif.

Exercice 2 – Groupe additif

Le neutre est $\bar{0}$. L'opposé de $\bar{2}$ est $\bar{2}$, car leur somme est nulle modulo 4. Le groupe est commutatif.

Exercice 3 – Groupe additif

Le neutre est $\bar{0}$. L'opposé de $\bar{2}$ est $\bar{3}$, car leur somme est nulle modulo 5. Le groupe est commutatif.

Exercice 4 – Groupe additif

Le neutre est $\bar{0}$. L'opposé de $\bar{2}$ est $\bar{4}$, car leur somme est nulle modulo 6. Le groupe est commutatif.

Exercice 5 – Groupe additif

Le neutre est $\bar{0}$. L'opposé de $\bar{2}$ est $\bar{6}$, car leur somme est nulle modulo 8. Le groupe est commutatif.

Exercice 6 – Inversibles

Une classe est inversible si son représentant est premier avec 4. La liste des représentants entre 0 et 3 est $\{1, 3\}$.

Exercice 7 – Inversibles

Une classe est inversible si son représentant est premier avec 6. La liste des représentants entre 0 et 5 est $\{1, 5\}$.

Exercice 8 – Inversibles

Une classe est inversible si son représentant est premier avec 8. La liste des représentants entre 0 et 7 est $\{1, 3, 5, 7\}$.

Exercice 9 – Inversibles

Une classe est inversible si son représentant est premier avec 9. La liste des représentants entre 0 et 8 est $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.

Exercice 10 – Inversibles

Une classe est inversible si son représentant est premier avec 10. La liste des représentants entre 0 et 9 est $\{1, 3, 7, 9\}$.

Exercice 11 – Sous-groupe de $\mathbb{Z}$

Il contient zéro. Pour deux éléments $2u$ et $2v$, la différence vaut $2(u - v)$ et appartient encore à $2\mathbb{Z}$. Le critère de sous-groupe est vérifié.

Exercice 12 – Sous-groupe de $\mathbb{Z}$

Il contient zéro. Pour deux éléments $3u$ et $3v$, la différence vaut $3(u - v)$ et appartient encore à $3\mathbb{Z}$. Le critère de sous-groupe est vérifié.

Exercice 13 – Sous-groupe de $\mathbb{Z}$

Il contient zéro. Pour deux éléments $4u$ et $4v$, la différence vaut $4(u - v)$ et appartient encore à $4\mathbb{Z}$. Le critère de sous-groupe est vérifié.

Exercice 14 – Sous-groupe de $\mathbb{Z}$

Il contient zéro. Pour deux éléments $5u$ et $5v$, la différence vaut $5(u - v)$ et appartient encore à $5\mathbb{Z}$. Le critère de sous-groupe est vérifié.

Exercice 15 – Sous-groupe de $\mathbb{Z}$

Il contient zéro. Pour deux éléments $6u$ et $6v$, la différence vaut $6(u - v)$ et appartient encore à $6\mathbb{Z}$. Le critère de sous-groupe est vérifié.

Exercice 16 – Approfondissement : critère

Pour $h \in H$, $h - h = 0 \in H$. Pour $x \in H$, $0 - x = -x \in H$. Enfin $x + y = x - (-y) \in H$. Le neutre, les opposés et la somme sont donc présents ; l'associativité est héritée.

Exercice 17 – Approfondissement : contre-exemple

Non : 1 appartient à $\mathbb{N}$, mais son opposé -1 n'y appartient pas. La stabilité par addition seule ne suffit pas.

Exercice 18 – Approfondissement : corps

Modulo 5, chaque classe non nulle est première avec 5 et possède un inverse. Modulo 6, la classe de 2 n'a pas d'inverse et $\bar{2}\bar{3} = \bar{0}$ avec deux facteurs non nuls.

Exercice 19 – Approfondissement : morphisme

$f(n + m) = f(n) + f(m)$: c'est un morphisme additif. Son noyau est $\{0\}$, donc il est injectif. Son image est $3\mathbb{Z}$, donc il n'est pas surjectif sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 20 – Approfondissement : intersection

Les deux sous-groupes contiennent le neutre, donc l'intersection est non vide. La différence de deux éléments communs appartient à chacun des deux sous-groupes, donc à leur intersection.