Chapitre 03 – Corrections

Permutations, cycles et signature

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Nombre de permutations

Choisir successivement les images donne $3! = 6$ possibilités : chaque image déjà choisie doit être retirée des choix suivants.

Exercice 2 – Nombre de permutations

Choisir successivement les images donne $4! = 24$ possibilités : chaque image déjà choisie doit être retirée des choix suivants.

Exercice 3 – Nombre de permutations

Choisir successivement les images donne $5! = 120$ possibilités : chaque image déjà choisie doit être retirée des choix suivants.

Exercice 4 – Nombre de permutations

Choisir successivement les images donne $6! = 720$ possibilités : chaque image déjà choisie doit être retirée des choix suivants.

Exercice 5 – Nombre de permutations

Choisir successivement les images donne $7! = 5040$ possibilités : chaque image déjà choisie doit être retirée des choix suivants.

Exercice 6 – Signature d'un cycle

Un cycle de longueur 3 est produit de 2 transpositions. Sa signature est $(-1)^2 = 1$.

Exercice 7 – Signature d'un cycle

Un cycle de longueur 4 est produit de 3 transpositions. Sa signature est $(-1)^3 = -1$.

Exercice 8 – Signature d'un cycle

Un cycle de longueur 5 est produit de 4 transpositions. Sa signature est $(-1)^4 = 1$.

Exercice 9 – Signature d'un cycle

Un cycle de longueur 6 est produit de 5 transpositions. Sa signature est $(-1)^5 = -1$.

Exercice 10 – Signature d'un cycle

Un cycle de longueur 7 est produit de 6 transpositions. Sa signature est $(-1)^6 = 1$.

Exercice 11 – Puissance d'un cycle

Chaque application avance d'une position. Le premier retour de tous les éléments à leur position initiale a lieu après 2 applications ; l'ordre vaut 2.

Exercice 12 – Puissance d'un cycle

Chaque application avance d'une position. Le premier retour de tous les éléments à leur position initiale a lieu après 3 applications ; l'ordre vaut 3.

Exercice 13 – Puissance d'un cycle

Chaque application avance d'une position. Le premier retour de tous les éléments à leur position initiale a lieu après 4 applications ; l'ordre vaut 4.

Exercice 14 – Puissance d'un cycle

Chaque application avance d'une position. Le premier retour de tous les éléments à leur position initiale a lieu après 5 applications ; l'ordre vaut 5.

Exercice 15 – Puissance d'un cycle

Chaque application avance d'une position. Le premier retour de tous les éléments à leur position initiale a lieu après 6 applications ; l'ordre vaut 6.

Exercice 16 – Approfondissement : composition

1 est envoyé sur 2 ; 2 est envoyé sur 3 ; 3 est envoyé sur 1. La composition est le cycle (1 2 3). L'ordre de composition doit être précisé.

Exercice 17 – Approfondissement : cycles disjoints

Les cycles sont disjoints et commutent. Il faut un nombre d'itérations multiple de 3 et de 2 ; le plus petit est leur PPCM, soit 6.

Exercice 18 – Approfondissement : inverse

Il suffit de parcourir le cycle en sens inverse : (1 3 2 4). La composition avec le cycle initial fixe chaque élément.

Exercice 19 – Approfondissement : déterminant

Il multiplie le déterminant par -1. Si les deux colonnes sont égales, le déterminant est donc son propre opposé et vaut zéro dans R ou C.

Exercice 20 – Approfondissement : parité

Non : la signature est un morphisme bien défini vers $\{-1, 1\}$, chaque transposition ayant signature -1. Les deux décompositions donneraient des signatures opposées pour le même élément.