Chapitre 03 – Cours

Permutations, cycles et signature

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Composer et inverser des permutations
- Décomposer en cycles
- Relier la signature au déterminant

1. Bijections d'un ensemble fini

Une permutation de $\{1, \dots, n\}$ est une bijection de cet ensemble sur lui-même.

Il existe n! permutations : on choisit l'image du premier élément parmi n choix, puis celle du second parmi n-1 choix, et ainsi de suite.

L'ensemble forme le groupe symétrique pour la composition.

La permutation identité est le neutre ; l'inverse existe grâce à la bijectivité.

2. Convention de composition

Dans $\sigma \circ \tau$, on applique d'abord τ, puis σ.

Cette convention doit être maintenue dans tous les calculs.

Pour calculer une composition, on suit l'image de chaque élément au lieu de juxtaposer les écritures.

Le groupe symétrique n'est pas commutatif dès que n est au moins 3 : échanger deux opérations peut changer la permutation finale.

3. Cycles

Un cycle $(a_1 \dots a_k)$ envoie a_1 sur a_2, puis chaque élément sur le suivant et le dernier sur le premier ; il fixe les autres.

Toute permutation se décompose en cycles disjoints en suivant successivement les orbites de ses éléments.

Les cycles disjoints commutent.

L'ordre de la permutation est le PPCM de leurs longueurs : c'est le premier nombre d'itérations qui ramène simultanément tous les éléments à leur départ.

4. Transpositions et signature

Une transposition échange exactement deux éléments.

Un cycle de longueur k se décompose en k-1 transpositions.

Toute permutation est donc un produit de transpositions, mais la décomposition n'est pas unique.

Le théorème de parité affirme que la parité du nombre de transpositions, elle, ne dépend pas du choix.

La signature vaut 1 pour une permutation paire et -1 pour une permutation impaire ; elle respecte les produits.

Un cycle de longueur k a pour signature $(-1)^{k-1}$.

5. Déterminants

La formule générale du déterminant d'une matrice carrée combine produits de coefficients et signatures des permutations.

Elle explique pourquoi le déterminant change de signe lorsqu'on échange deux lignes ou colonnes.

Cette définition n'est pas la méthode numérique la plus efficace pour une grande matrice : le pivot et les propriétés de multilinéarité permettent généralement de réduire les calculs.

Un déterminant non nul caractérise l'inversibilité d'une matrice carrée.

6. Exemple et méthode

La permutation (1 2 3)(4 5) a deux cycles disjoints, d'ordres 3 et 2.

Son ordre vaut 6.

Sa signature vaut $(-1)^2(-1) = -1$.

Pour inverser chaque cycle, on le lit en sens opposé.

On contrôle ensuite quelques images ou l'ensemble du tableau selon la taille.

Ce chapitre explicite un outil du programme MPSI ; une utilisation en PCSI peut rester limitée aux propriétés nécessaires au calcul des déterminants, sans reprendre tout le développement

de théorie des groupes.

Suivre les images une à une

Définition – Support et points fixes

Le support d'une permutation est l'ensemble des éléments qu'elle ne fixe pas. Deux cycles à supports disjoints commutent, car chacun agit là où l'autre fixe les éléments. Les points fixes peuvent être omis de l'écriture en cycles, mais restent dans l'ensemble sur lequel la permutation agit.

Exemple résolu – 1. Composer dans le bon ordre

Dans S_3, posons $\sigma = (1\ 2)$ et $\tau = (2\ 3)$. Calculons $\sigma \circ \tau$.

1. Partir de 1 : τ fixe 1, puis σ l'envoie sur 2. Partir de 2 : τ l'envoie sur 3, que σ fixe.
2. Partir de 3 : τ l'envoie sur 2, puis σ l'envoie sur 1. On obtient donc le cycle (1 2 3).
3. Dans l'autre ordre, 1 va sur 3, 3 sur 2 et 2 sur 1 : $\tau \circ \sigma = (1\ 3\ 2)$.

Les deux produits sont différents ; cette vérification donne un contre-exemple explicite à la commutativité.

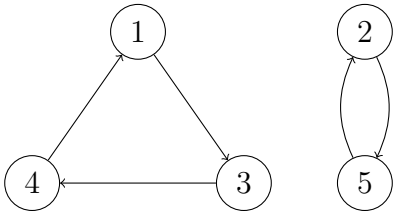
Exemple résolu – 2. Décomposer, calculer l'ordre et la signature

Soit la permutation ρ définie par les images $1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 5$, $3 \mapsto 4$, $4 \mapsto 1$, $5 \mapsto 2$.

1. Suivre l'orbite de 1 donne $1 \to 3 \to 4 \to 1$, donc le cycle (1 3 4). Le premier élément restant est 2, qui donne (2 5).
2. Les cycles sont disjoints : $\rho = (1\ 3\ 4)(2\ 5)$. L'ordre est le PPCM de 3 et 2, soit 6.
3. La signature vaut $(-1)^{3-1}(-1)^{2-1} = -1$. L'inverse renverse chaque cycle : $\rho^{-1} = (1\ 4\ 3)(2\ 5)$.

Le contrôle $\rho^{-1}(\rho(1)) = \rho^{-1}(3) = 1$ vérifie une image ; les autres se contrôlent de la même manière.

Les orbites de la permutation



Le triangle revient à son point de départ après trois itérations, et la paire après deux. Le retour simultané a lieu après six itérations : l'ordre d'un produit de cycles disjoints est un PPCM, pas systématiquement la somme de leurs longueurs.

À retenir – Bilan

Annoncer la convention de composition, calculer les images et former ensuite les cycles. Les cycles disjoints donnent directement l'ordre et la signature. La signature dépend de la parité du nombre de transpositions, même si une décomposition particulière en transpositions n'est jamais unique.