

Chapitre 5 – Corrections

Modélisation quadratique : paraboles et optimisation

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Identifier le degré

La première et la troisième sont du second degré, car le coefficient de x^2 est non nul. La seconde est affine.

Exercice 2 – Calcul d'images

$f(0) = 5$, $f(2) = 1$ et $f(4) = 5$.

Exercice 3 – Écriture avec un carré

$$(x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5.$$

Exercice 4 – Minimum

Le carré est positif ou nul ; $f(x) \geq 1$, avec égalité en $x = 2$. Minimum 1 en 2.

Exercice 5 – Maximum

Le carré est positif ou nul, donc $g(x) \leq 12$, avec égalité pour $x = 4$.

Exercice 6 – Axe de symétrie

Les points situés à égale distance de -3 ont la même image. L'axe est la droite $x = -3$.

Exercice 7 – Équation carrée

$x - 1 = 3$ ou $x - 1 = -3$, donc $S = \{-2; 4\}$.

Exercice 8 – Équation impossible

Un carré ne peut pas être négatif : aucune solution réelle.

Exercice 9 – Produit nul

Un facteur doit être nul, donc $S = \{2; 7\}$.

Exercice 10 – Signe du produit

Les facteurs sont de signes opposés entre les racines et le produit s'annule aux bornes. Solution : $[2; 7]$.

Exercice 11 – Comparer des images

Les abscisses sont à distance 2 de 3. Les deux images valent $4 + 4 = 8$.

Exercice 12 – Tableau

Les images sont 4, 1, 0, 1, 4. La fonction décroît jusqu'à 0 puis croît à partir de 0.

Exercice 13 – Aire

$$A(x) = x(8 - x) = 8x - x^2, \text{ avec } 0 < x < 8.$$

Exercice 14 – Aire maximale

$$16 - (x - 4)^2 = 16 - (x^2 - 8x + 16) = 8x - x^2. \text{ Le maximum vaut } 16, \text{ atteint en } x = 4.$$

Exercice 15 – Modèle de hauteur

$$(t - 3)^2 = 9, \text{ donc } t = 0 \text{ ou } t = 6, \text{ tous deux dans le domaine.}$$

Exercice 16 – Approfondissement : seuil

$$(x - 4)^2 \leq 9 \iff -3 \leq x - 4 \leq 3, \text{ donc } S = [1; 7].$$

Exercice 17 – Approfondissement : domaine restreint

Sur cet intervalle, $x - 3$ est positif et croît de 2 à 5 ; son carré croît. Le minimum est donc $2^2 + 2 = 6$, atteint en 5, pas au sommet hors domaine.

Exercice 18 – Approfondissement : deux formes

Le produit vaut $x^2 - 6x + 5$. L'autre écriture vaut $x^2 - 6x + 9 - 4$, donc la même expression. Le minimum est -4 en 3 et les zéros 1, 5.

Exercice 19 – Approfondissement : aire cible

$$x(10 - x) = 21 \iff x^2 - 10x + 21 = 0 \iff (x - 3)(x - 7) = 0. \text{ Solutions } x = 3 \text{ ou } x = 7, \text{ toutes deux admissibles.}$$

Exercice 20 – Approfondissement : bénéfice fictif

$$B(x) \geq 0 \iff (x - 6)^2 \leq 25 \iff 1 \leq x \leq 11. \text{ Le maximum vaut } 25, \text{ atteint en } 6.$$