

Chapitre 3 – Cours

Phénomènes aléatoires : conditionnement et indépendance

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Calculer avec un tableau ou un arbre de probabilités.
- Utiliser et justifier l'indépendance de deux événements.
- Étudier jusqu'à quatre répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli.

Les mots pour comprendre

Définition – Conditionner

Une probabilité conditionnelle se calcule dans une sous-population déterminée. On change donc le dénominateur par rapport à la population entière.

Définition – Deux événements indépendants

Ils sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. La connaissance de l'un ne change alors pas la probabilité de l'autre, lorsque le conditionnement est défini.

1. Probabilités conditionnelles

Pour $P(A) > 0$, la probabilité de B sachant A est $P_A(B) = P(A \cap B)/P(A)$. Dans un tableau d'effectifs, on restreint la population de référence aux individus de A.

Dans un arbre, le poids de la branche qui mène de A vers B est une probabilité conditionnelle. Le chemin complet a pour probabilité $P(A)P_A(B)$.

Les probabilités issues d'un même nœud totalisent 1. On additionne les probabilités de chemins incompatibles lorsqu'ils conduisent au même événement final.

Ainsi $P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$ si $0 < P(A) < 1$. Les probabilités inverses $P_A(B)$ et $P_B(A)$ ne sont généralement pas égales ; le tableau ou l'arbre permet de retrouver leur intersection commune avant de changer de référence.

2. Indépendance

Deux événements A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Si $P(A) > 0$, cette égalité équivaut à $P_A(B) = P(B)$: savoir que A est réalisé ne modifie pas la probabilité de B. Le critère par produit reste valable même lorsqu'un événement a une probabilité nulle.

Indépendance et incompatibilité ne sont pas synonymes. Deux événements incompatibles de probabilités strictement positives ont une intersection de probabilité nulle, mais un produit positif : ils ne sont donc pas indépendants.

L'indépendance est une hypothèse de modèle ou une propriété à vérifier ; elle ne découle pas du seul mot « hasard ».

3. Épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli comporte deux résultats que l'on appelle succès et échec. Si le succès a pour probabilité p , l'échec a pour probabilité $1 - p$.

Les mots succès et échec servent au codage et n'expriment pas nécessairement un jugement favorable ou défavorable sur le résultat. On répète ici au plus quatre fois une même épreuve, avec une probabilité p inchangée et des épreuves indépendantes.

L'arbre a alors les mêmes deux poids à chaque étape. La probabilité d'un chemin est le produit de ces poids : par exemple, pour trois épreuves, le chemin succès-échec-succès a pour probabilité $p(1 - p)p$.

4. Compter les chemins

Pour obtenir exactement deux succès en trois épreuves, les chemins sont SSE, SES et ESS.

Ils ont tous pour probabilité $p^2(1 - p)$; la probabilité cherchée est donc $3p^2(1 - p)$. Cette méthode par arbre ne nécessite pas une formule générale de loi binomiale.

L'événement « au moins un succès » se traite souvent par son contraire : pour n répétitions indépendantes, aucun succès a pour probabilité $(1 - p)^n$, donc au moins un succès a pour probabilité $1 - (1 - p)^n$. Il faut préciser le nombre d'épreuves et le domaine de p .

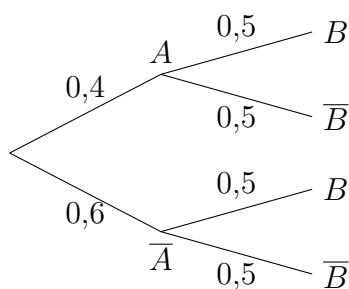
5. Simulation et interprétation

Une simulation répète le modèle afin d'observer des fréquences.

Elle n'impose pas que la fréquence égale exactement p sur un nombre fini d'essais. Les données et modèles des exercices sont fictifs.

Un résultat calculé n'est valable que sous les hypothèses annoncées, notamment l'indépendance et la stabilité de la probabilité de succès.

Voir la notion



Exemple d'arbre : les probabilités issues de chaque nœud ont pour somme 1.

Deux exemples, pas à pas

Exemple résolu – 1 – Indépendance vérifiée

Question. $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,4$, $P(A \cap B) = 0,12$. Les événements sont-ils indépendants ?

Résolution. Oui, car $0,3 \times 0,4 = 0,12 = P(A \cap B)$.

Exemple résolu – 2 – Deux succès

Question. Deux épreuves indépendantes ont chacune une probabilité de succès 0,4. Calculer la probabilité de deux succès.

Résolution. $0,4^2 = 0,16$.
