

Chapitre 4 – Cours

Variation linéaire : suites arithmétiques et fonctions affines

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Reconnaître une variation additive constante.
- Passer de la récurrence à une formule explicite.
- Résoudre un seuil en tenant compte du caractère discret ou continu.

Les mots pour comprendre

Définition – Une variation constante

Un même ajout à chaque étape conduit à une suite arithmétique : $u_{n+1} = u_n + r$.

Définition – Une fonction affine

Une fonction affine s'écrit $f(x) = ax + b$. Sa représentation est une droite ; a donne la variation de f pour une augmentation d'une unité de x .

1. Du phénomène au modèle

Un modèle linéaire au sens d'une variation constante décrit une grandeur qui augmente ou diminue d'une même quantité à chaque étape. Si le temps prend des valeurs entières, on utilise une suite ; s'il varie continûment, une fonction peut être plus adaptée.

Le mot linéaire dans ce contexte d'évolution ne signifie pas nécessairement une fonction de la forme ax : une fonction affine $ax + b$ convient lorsque la valeur initiale n'est pas nulle. Avant de calculer, on choisit l'origine du temps et les unités.

Une grandeur comptée annuellement ne se lit pas exactement comme une grandeur mesurée à chaque instant. Toute formule doit être accompagnée de son domaine de validité, notamment lorsque le modèle décroissant pourrait produire des valeurs négatives.

2. Suites arithmétiques

On note d'abord $u(n)$ la valeur au rang n .

Une suite est arithmétique de raison r si $u(n+1) = u(n) + r$ pour tout rang autorisé. Avec une valeur initiale $u(0)$, la formule explicite est $u(n) = u(0) + nr$.

Cette écriture donne directement un terme éloigné sans calculer tous les précédents. Si l'indexation commence à 1, la formule devient $u(n) = u(1) + (n-1)r$.

Confondre ces deux origines provoque un décalage d'une étape. La suite est croissante si $r > 0$, décroissante si $r < 0$ et constante si $r = 0$.

Ses points représentatifs sont alignés, mais seuls les rangs entiers figurent dans le modèle discret.

3. Fonctions affines

Une fonction affine s'écrit $f(t) = at + b$. Son taux d'accroissement entre deux instants distincts est $[f(t_2) - f(t_1)] / (t_2 - t_1) = a$.

Sa courbe est une droite et son sens de variation dépend du signe de a . Le terme b est la valeur au temps 0 si cet instant appartient au domaine pertinent.

Si deux observations $(t_1; v_1)$ et $(t_2; v_2)$ sont connues, avec $t_1 \neq t_2$, on obtient $a = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1)$ puis $b = v_1 - at_1$. L'unité de a est une unité de grandeur par unité de temps.

Une concordance sur deux points ne garantit pas que le phénomène entier suive exactement une droite.

4. Seuils

Pour trouver à partir de quel moment une grandeur dépasse un seuil, on traduit la question en équation ou en inéquation. Dans un modèle discret, la solution réelle doit ensuite être adaptée à un entier : si $n \geq 7,2$, le premier rang est 8.

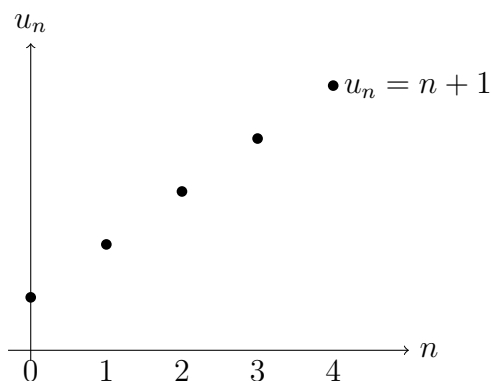
On vérifie ce rang et le précédent pour confirmer le premier dépassement.

5. Applications et limites

Des versements fixes ou des intérêts simples produisent souvent une variation additive. Ils se distinguent des intérêts composés, où une proportion de la valeur actuelle est ajoutée à chaque étape.

Les tableaux et graphiques permettent de comparer ces modèles. On termine par une interprétation avec unités et par une discussion des hypothèses : un modèle sert à éclairer une situation, non à garantir que son évolution future restera identique.

Voir la notion



Les points sont séparés : une suite est définie aux indices entiers.

Deux exemples, pas à pas

Exemple résolu – 1 – Départ au rang un

Question. $v(1) = 10$ et la raison vaut 2. Donner $v(n)$ puis $v(6)$.

Résolution. $v(n) = 10 + 2(n - 1)$; $v(6) = 20$.

Exemple résolu – 2 – Image affine

Question. Pour $f(t) = 2t + 5$, calculer $f(3)$ et $f(8)$.

Résolution. $f(3) = 11$ et $f(8) = 21$.
