

Chapitre 5 – Cours

Modélisation quadratique : paraboles et optimisation

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Identifier une dépendance quadratique et ses différentes écritures.
- Lire et justifier un maximum ou un minimum sans dérivation.
- Résoudre des questions simples par factorisation ou propriété du carré.

Les mots pour comprendre

Définition – Une parabole

La courbe d'une fonction du second degré est une parabole. Elle possède un axe de symétrie et un sommet.

Définition – Le sommet

Dans une écriture $a(x - \alpha)^2 + \beta$, le sommet est $(\alpha; \beta)$. Il donne un minimum si $a > 0$, un maximum si $a < 0$.

1. Reconnaître une variation non linéaire

Une fonction polynôme du second degré s'écrit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Elle peut modéliser une aire, une trajectoire idéalisée ou une relation économique fictive.

Contrairement à une fonction affine, elle ne possède pas un taux d'accroissement constant. Son allure est une parabole, tournée vers le haut si $a > 0$ et vers le bas si $a < 0$.

On choisit le domaine avant d'interpréter les valeurs. Pour l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent x et $10 - x$, on retient $0 < x < 10$ si le rectangle doit être non dégénéré.

Les valeurs négatives ou les instants en dehors de la période étudiée peuvent n'avoir aucun sens dans le problème, même si la formule algébrique les accepte.

2. Plusieurs formes pour une même fonction

Une forme développée facilite le calcul d'une image ou la comparaison de deux expressions. Une forme factorisée permet de repérer les zéros par la règle du produit nul.

Une écriture faisant apparaître un carré fournit des informations sur les extrema. Par exemple $f(x) = x^2 - 6x + 13 = (x - 3)^2 + 4$: ces deux écritures définissent exactement la même fonction.

La validité d'une transformation se vérifie en développant. On ne choisit pas une forme parce qu'elle semble plus courte, mais parce qu'elle répond à la question.

On n'utilise ici ni la théorie générale du discriminant, ni la dérivation : les résolutions reposent sur des carrés, des produits, des graphiques ou des outils numériques.

3. Axe de symétrie et extremum

Dans l'exemple $f(x) = (x - 3)^2 + 4$, le carré est positif ou nul. Donc $f(x) \geq 4$, avec égalité seulement pour $x = 3$.

Le minimum vaut ainsi 4, atteint en 3. Les points d'abscisses $3 - h$ et $3 + h$ ont la même image, ce qui met en évidence l'axe de symétrie $x = 3$.

Pour $g(x) = 9 - (x + 1)^2$, on obtient au contraire $g(x) \leq 9$, avec égalité en $x = -1$. Le maximum global est 9.

Si le domaine retenu ne contient pas l'abscisse du sommet, il faut adapter l'étude aux valeurs autorisées ; on ne donne pas automatiquement l'extremum global comme réponse au problème.

4. Équations et inéquations simples

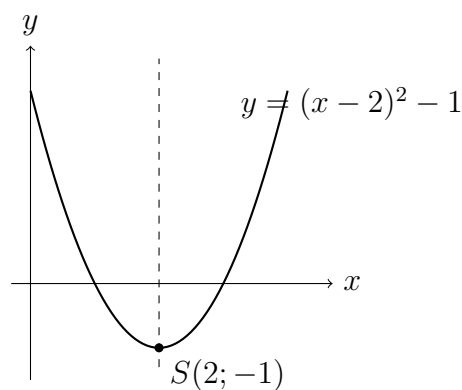
L'égalité $(x - a)^2 = k$ se résout en comparant k à zéro. Si $k > 0$, les solutions sont $a - \sqrt{k}$ et $a + \sqrt{k}$; si $k = 0$, seule a convient ; si $k < 0$, il n'y a pas de solution réelle.

Pour un produit $(x - r)(x - s)$, on étudie les signes des facteurs afin de résoudre une inéquation.

5. Exploiter un modèle

Un tableau de valeurs ou un graphique aide à repérer un extremum et à proposer une conjecture. L'écriture avec un carré ou une factorisation peut la justifier exactement.

On termine par une phrase avec l'unité, la valeur obtenue, le domaine et les hypothèses : un maximum calculé pour un modèle fictif ne prouve pas que toute situation réelle lui obéit.

Voir la notion

La droite en pointillés est l'axe de symétrie. Le sommet indique ici un minimum.

Deux exemples, pas à pas

Exemple résolu – 1 – Maximum

Question. Déterminer le maximum de $g(x) = 12 - (x - 4)^2$ sur $\mathbb{R}$.

Résolution. Le carré est positif ou nul, donc $g(x) \leq 12$, avec égalité pour $x = 4$.

Exemple résolu – 2 – Signe du produit

Question. Résoudre $(x - 2)(x - 7) \leq 0$.

Résolution. Les facteurs sont de signes opposés entre les racines et le produit s'annule aux bornes. Solution : $[2; 7]$.
