

Chapitre 6 – Cours

Variation exponentielle : suites géométriques et taux moyens

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Reconnaître une variation multiplicative constante.
- Étudier une suite géométrique et un modèle exponentiel de base positive.
- Calculer un taux moyen et chercher un seuil par essais ou algorithme.

Les mots pour comprendre

Définition – Une suite géométrique

Une suite est géométrique lorsque chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par un même nombre q .

Définition – Un taux moyen

Sur n périodes, un coefficient global positif C correspond au coefficient moyen $q = C^{1/n}$, puis au taux moyen $q - 1$.

1. Une évolution multiplicative

Lorsqu'une grandeur est multipliée par le même coefficient à chaque étape, son évolution est géométrique. Ce modèle diffère d'une évolution arithmétique, où une quantité fixe est ajoutée.

Une hausse de 5% par an correspond à un facteur annuel $q = 1,05$; la somme ajoutée en euros n'est pas constante, car elle dépend de la valeur déjà atteinte. On précise l'instant initial, la période, la valeur de départ et les hypothèses de stabilité.

Les modèles de croissance ou décroissance étudiés dans ce chapitre supposent une grandeur initiale positive et une raison $q > 0$. Une projection de ce type peut devenir irréaliste à long terme : les ressources, les changements de comportement ou les contraintes physiques ne disparaissent pas dans la situation réelle.

2. Suites géométriques

Une suite $u(n)$ est géométrique de raison q si $u(n+1) = qu(n)$.

Avec une valeur initiale $u(0)$, la formule explicite est $u(n) = u(0)q^n$. Si l'indexation commence à 1, on écrit $u(n) = u(1)q^{n-1}$.

L'exposant compte le nombre de passages entre la valeur connue et le rang cherché. Pour $u(0) > 0$, la suite est strictement croissante si $q > 1$, constante si $q = 1$, strictement décroissante si $0 < q < 1$.

Une baisse répétée de 20% donne $q = 0,8$; les valeurs restent positives même lorsqu'elles se rapprochent de zéro. On ne confond pas cette décroissance avec une soustraction constante de vingt unités.

3. Passer à un modèle continu

Pour une base $a > 0$, on peut définir et utiliser numériquement a^x pour $x \geq 0$.

La fonction $f(x) = Ca^x$, avec $C > 0$, prolonge un modèle multiplicatif à des instants non entiers. Pour $a > 1$, elle est croissante ; pour $0 < a < 1$, elle est décroissante.

Cette utilisation n'exige ici ni logarithme ni dérivation. Les exposants fractionnaires se relient aux racines : $a^{1/n}$ est l'unique réel positif dont la puissance n vaut a .

Cela permet notamment de calculer un coefficient moyen par période à partir d'une évolution globale.

4. Taux moyen

Si une grandeur positive est multipliée par c en n périodes, le coefficient moyen q vérifie $q^n = c$, donc $q = c^{1/n}$. Le taux moyen est $q - 1$.

Il ne s'agit généralement pas de la moyenne arithmétique des taux successifs. Par exemple un facteur global 1,21 en deux ans correspond à $q = \sqrt{1,21} = 1,10$, soit 10% par an.

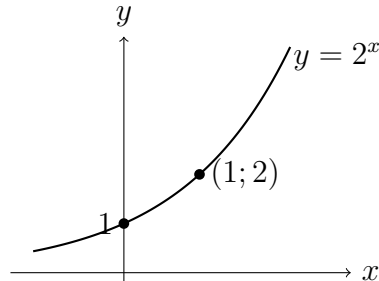
5. Seuils et contrôle

Pour déterminer le premier rang dépassant un seuil, on peut calculer un tableau de valeurs ou écrire une boucle qui multiplie la valeur par q jusqu'à atteindre la condition.

On vérifie toujours le rang retenu et le précédent. Le sens de variation aide à interpréter le résultat.

On conserve les coefficients exacts pendant les calculs et on arrondit seulement la valeur finale ou le taux demandé.

Voir la notion



Multiplier la valeur par 2 lorsque x augmente de 1 donne une croissance exponentielle.

Deux exemples, pas à pas

Exemple résolu – 1 – Départ au rang un

Question. $v(1) = 20$ et la raison vaut 2. Calculer $v(5)$.

Résolution. $v(5) = 20 \times 2^{5-1} = 320$.

Exemple résolu – 2 – Taux moyen sur deux ans

Question. Une grandeur est multipliée par 1,44 en deux ans. Quel est son taux moyen annuel ?

Résolution. $q = \sqrt{1,44} = 1,2$, donc taux moyen 20%.
