

Chapitre 01 – Cours

Suites numériques : calculer, modéliser et sommer

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Distinguer formule explicite et récurrence
- Étudier les variations
- Reconnaître les modèles arithmétiques et géométriques

Les mots pour comprendre

Définition – Une suite

Une suite associe un nombre à chaque indice entier autorisé. Le terme u_n est le nombre obtenu à l'indice n .

Définition – Une suite arithmétique

Une suite est arithmétique lorsque la différence entre deux termes consécutifs est constante : $u_{n+1} - u_n = r$.

1. Définir une suite

Une suite réelle associe à chaque entier n d'un ensemble d'indices un réel u_n . L'indice n et le terme u_n ne jouent pas le même rôle : u_5 désigne un nombre, pas une fonction à multiplier par 5.

On précise le premier indice, souvent 0 ou 1. Une formule explicite permet de calculer un terme directement, comme $u_n = 3n + 2$.

Une relation de récurrence permet de calculer chaque terme à partir des précédents : $u_0 = 2$, $u_{n+1} = 3u_n + 1$. Elle doit être accompagnée d'un terme initial.

Pour la seconde suite, $u_1 = 7$, puis $u_2 = 22$. Remplacer directement n par 10 dans la récurrence ne donne pas u_{10} : il faut connaître u_9 .

Un tableau de valeurs aide à expérimenter, sans démontrer une propriété valable pour tous les indices.

2. Suites arithmétiques

Une suite est arithmétique de raison r lorsque $u_{n+1} = u_n + r$ à chaque étape. La différence entre deux termes consécutifs est constante.

À partir de l'indice 0,

$$u_n = u_0 + nr.$$

À partir d'un indice p , $u_n = u_p + (n - p)r$. Si $r > 0$, la suite est strictement croissante ; si $r < 0$, strictement décroissante ; si $r = 0$, constante.

Ce modèle décrit un ajout constant, par exemple 15 euros économisés chaque semaine, mais pas une augmentation constante en pourcentage. La somme de N termes consécutifs vaut le nombre de termes multiplié par la moyenne du premier et du dernier.

En particulier,

$$\sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}.$$

Il y a bien $n+1$ termes de 0 à n . On peut justifier la formule en écrivant la somme dans les deux sens et en additionnant les termes symétriques.

3. Suites géométriques

Une suite est géométrique de raison q lorsque $u_{n+1} = qu_n$.

On obtient $u_n = u_0 q^n$. Un taux d'évolution constant t correspond à $q = 1 + t$.

Pour $u_0 > 0$, $q > 1$ entraîne une croissance stricte ; $0 < q < 1$, une décroissance stricte. Une raison négative peut faire alterner les signes : il ne faut pas appliquer ces règles sans leurs conditions.

Pour $q \neq 1$, l'identité obtenue en soustrayant q fois la somme à elle-même donne

$$1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Si $q = 1$, cette somme vaut $n+1$. La formule ne s'utilise pas avec un dénominateur nul.

4. Variations et seuils

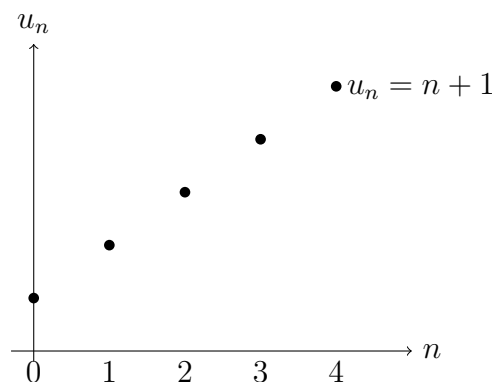
Pour une suite générale, étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ est une méthode robuste.

Un quotient peut aider lorsque tous les termes sont strictement positifs. Pour un seuil, une boucle Python calcule les termes jusqu'à satisfaire la condition ; on explique pourquoi l'arrêt est plausible et on contrôle l'indice retourné. **Exemple résolu.** Un capital fictif de 100 euros augmente de 10% par période : $u_n = 100(1,1)^n$.

Les trois premiers termes sont 100, 110, 121. Le premier dépassement de 120 se produit à $n = 2$.

Ce modèle suppose un taux constant et ne tient compte d'aucun frais. **À retenir.** Toujours identifier le premier indice, compter les termes d'une somme et distinguer variation absolue et variation relative. En Première, les comportements à long terme peuvent être explorés ; les théorèmes de convergence seront approfondis en Terminale.

Voir la notion



Les points sont séparés : une suite est définie aux indices entiers.

Deux exemples, pas à pas

Exemple résolu – 1 – Géométrie

Question. $v_0 = 3$, $v_{n+1} = 2v_n$. Calculer v_5 .

Résolution. $v_n = 3 \times 2^n$, donc $v_5 = 96$.

Exemple résolu – 2 – Somme arithmétique

Question. $u_n = 3 + 2n$. Calculer $u_0 + \dots + u_{10}$.

Résolution. $u_{10} = 23$; il y a 11 termes, donc $11(3 + 23)/2 = 143$.
