

Chapitre 02 – Cours

Polynômes du second degré

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Passer entre trois formes
- Résoudre une équation du second degré
- Étudier le signe et optimiser

Les mots pour comprendre

Définition – Une racine

Une racine de f est un réel a qui vérifie $f(a) = 0$. Sur la courbe, le point correspondant se situe sur l'axe des abscisses.

Définition – Le discriminant

Pour $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, on appelle discriminant le réel $\Delta = b^2 - 4ac$. Son signe renseigne sur le nombre de racines réelles.

1. Reconnaître les formes utiles

Un polynôme du second degré s'écrit $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$. Sa représentation graphique est une parabole.

La forme développée permet de lire les coefficients ; la forme factorisée, lorsqu'elle existe sur les réels, permet de lire les racines ; la forme canonique met en évidence un sommet et un extremum. Le choix de la forme dépend de la question, pas d'une préférence de notation.

On peut vérifier une transformation en développant. Deux expressions qui coïncident en quelques valeurs ne sont pas nécessairement identiques : une identité doit être démontrée algébriquement.

2. Forme canonique et sommet

La complétion du carré conduit à

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, \quad \alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = f(\alpha).$$

Puisque $(x - \alpha)^2 \geq 0$, si $a > 0$ le minimum est β , atteint en α ; si $a < 0$ le maximum est β .

L'axe de symétrie est $x = \alpha$. Une parabole ouverte vers le haut est décroissante puis croissante ; vers le bas, elle est croissante puis décroissante.

Ces variations se lisent de part et d'autre du sommet. **Exemple résolu.** $x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 4$. Le minimum vaut -4 en 3 .

On peut aussi écrire $(x - 1)(x - 5)$, ce qui donne immédiatement les zéros 1 et 5 .

3. Racines et discriminant

Pour résoudre $ax^2 + bx + c = 0$, on commence par chercher une factorisation évidente ou une identité remarquable. Si nécessaire, on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta > 0$, les deux solutions sont $(-b - \sqrt{\Delta})/(2a)$ et $(-b + \sqrt{\Delta})/(2a)$. Si $\Delta = 0$, il existe une racine double $-b/(2a)$.

Si $\Delta < 0$, il n'existe aucune racine réelle. Cette classification se comprend avec la forme canonique : l'équation devient $(x - \alpha)^2 = \Delta/(4a^2)$.

Un carré est positif ou nul, et un nombre positif a deux racines carrées opposées. Lorsque les racines réelles x_1, x_2 existent, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Elles vérifient $x_1 + x_2 = -b/a$ et $x_1 x_2 = c/a$. Ces relations peuvent éviter un calcul de discriminant lorsqu'on reconnaît deux nombres de somme et produit donnés.

4. Signe et inéquations

Avec deux racines distinctes ordonnées, le polynôme est du signe de a à l'extérieur et du signe opposé entre les racines.

Les racines sont incluses dans les solutions d'une inéquation large et exclues pour une inéquation stricte. Avec une racine double, le signe ne change pas au passage de cette racine.

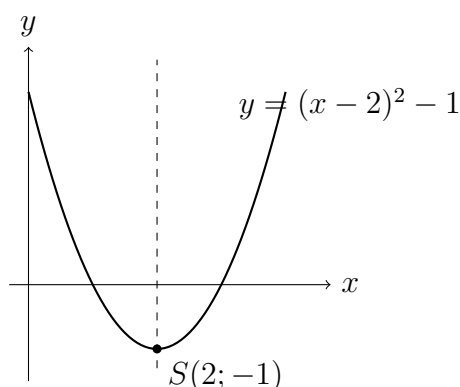
Sans racine réelle, le signe est toujours celui de a . **Méthode.** Ramener l'inéquation à un second membre nul ; identifier le signe du coefficient dominant et les racines ; construire le tableau de signes ; lire les intervalles demandés. On ne « prend pas la racine carrée » séparément dans une somme de termes.

5. Modéliser une situation

Dans un problème d'aire ou de bénéfice, on commence par préciser le domaine concret.

Le sommet donne un extremum sur tout $\mathbb{R}$, mais il faut vérifier s'il appartient au domaine autorisé ; sinon on compare les bornes et les variations. Un résultat algébrique négatif peut devoir être rejeté pour une longueur. **Erreurs à éviter.** Oublier le facteur a dans la factorisation ; confondre racines et coordonnées du sommet ; omettre les conditions $a \neq 0$ et $\Delta \geq 0$; diviser une inéquation par une expression de signe inconnu.

Voir la notion



La droite en pointillés est l'axe de symétrie. Le sommet indique ici un minimum.

Deux exemples, pas à pas

Exemple résolu – 1 – Racines évidentes

Question. Résoudre $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Résolution. On reconnaît $(x - 3)(x - 4)$: $S = \{3; 4\}$.

Exemple résolu – 2 – Coefficient négatif

Question. Résoudre $-2(x - 1)(x - 5) > 0$.

Résolution. Le polynôme est positif entre ses racines : $S =]1; 5[$. Les bornes sont exclues.
