Chapitre 03 – Cours

Nombre dérivé et tangente

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Calculer un taux d'accroissement
- Déterminer un nombre dérivé
- Écrire une tangente

Les mots pour comprendre

Définition – Le taux d'accroissement

Entre a et $a+h$, avec $h \neq 0$, le taux d'accroissement est $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Il mesure une variation moyenne.

Définition – Le nombre dérivé

Si ce taux tend vers un réel fini quand h tend vers zéro, ce réel est le nombre dérivé $f'(a)$. Il donne la pente de la tangente.

---

1. De la variation moyenne à la variation locale

Une fonction peut décrire une position, un coût ou une population. Entre deux abscisses distinctes a et b, le taux de variation moyen est $[f(b)-f(a)]/(b-a)$.

Géométriquement, c'est le coefficient directeur de la sécante passant par les points d'abscisses a et b de la courbe. Le signe renseigne sur la variation globale entre ces deux points, mais ne suffit pas à décrire tous les mouvements de la fonction à l'intérieur de l'intervalle.

Pour étudier la courbe près de a, on remplace b par $a+h$, avec $h \neq 0$, et l'on examine le taux d'accroissement lorsque h tend vers 0. La fonction est dérivable en a si ce taux tend vers un réel fini, noté $f'(a)$.

Cette notion est locale : une fonction peut être dérivable en certains points et pas en d'autres.

2. Calculer avec la définition

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Dans les calculs accessibles en Première, on développe puis simplifie le quotient pour $h \neq 0$, avant de chercher sa valeur limite. Il ne faut pas remplacer h par 0 dès le départ : le quotient initial ne serait pas défini. **Exemple résolu.** Pour $f(x) = x^2$, on a

$$\frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = 2a + h \quad (h \neq 0).$$

Lorsque h tend vers 0, le résultat tend vers $2a$.

Ainsi $f'(a) = 2a$. En particulier $f'(3) = 6$.

Ce nombre est une pente, pas l'ordonnée $f(3) = 9$. Pour une fonction affine $f(x) = mx + p$, le quotient vaut toujours m : son nombre dérivé est donc m en tout point.

Une droite a une pente constante.

3. Tangente à la courbe

Si f est dérivable en a, sa tangente au point $A(a; f(a))$ a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Il faut connaître deux informations différentes : le nombre dérivé, qui donne la pente, et l'image, qui permet de situer le point. Pour $f(x) = x^2$ en $a = 3$, l'équation est $y = 6(x-3) + 9 = 6x - 9$.

Vérifier que le point A appartient à cette droite est un contrôle simple et utile. Une tangente horizontale correspond à $f'(a) = 0$.

Cela ne suffit pas toujours à prouver un extremum : une fonction peut avoir une tangente horizontale sans changer de sens de variation.

4. Approximation affine locale

Pour une petite variation h, on peut approcher $f(a+h)$ par $f(a) + f'(a)h$. Il s'agit d'une approximation, pas d'une égalité générale.

Par exemple $\sqrt{4{,}04}$ est proche de $2 + \frac{1}{4} \times 0{,}04 = 2{,}01$. L'utilisation d'un symbole d'égalité à la place de $\approx$ masquerait l'erreur d'approximation.

Dans une application, on conserve les unités : si une position est exprimée en mètres et le temps en secondes, un nombre dérivé représente une vitesse en mètres par seconde. Une pente de coût peut être exprimée en euros par unité produite.

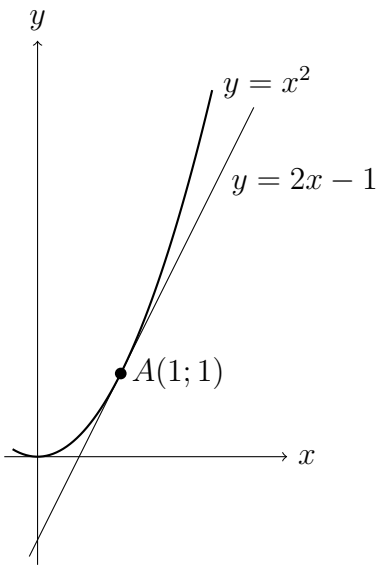
5. Quand la dérivation échoue

Pour $f(x) = |x|$ au point 0, le taux est $|h|/h$: il vaut 1 lorsque $h > 0$ et -1 lorsque $h < 0$.

Il ne tend pas vers le même réel des deux côtés ; la fonction n'est pas dérivable en 0. La continuité d'un tracé n'assure donc pas sa dérivabilité. **Méthode à retenir.** Identifier a, calculer $f(a)$, déterminer $f'(a)$, puis écrire l'équation point-pente.

Pour une lecture graphique, sélectionner deux points de la tangente, pas deux points quelconques de la courbe.

Voir la notion



La droite touche la parabole au point A : sa pente donne le nombre dérivé en 1.

Deux exemples, pas à pas

Exemple résolu – 1 – Fonction constante

Question. Calculer le taux et le nombre dérivé de $f(x) = 8$.

Résolution. $[8 - 8]/h = 0$; le nombre dérivé est nul en tout point.

Exemple résolu – 2 – Lire une pente

Question. Une tangente passe par $(1; 2)$ et $(3; 8)$. Quelle est sa pente ?

Résolution. $(8 - 2)/(3 - 1) = 3$. Ce coefficient donne le nombre dérivé au point de tangence.