

## Chapitre 04 – Corrections

Dérivation, variations et optimisation

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

### Exercice 1 – Polynôme

$f'(x) = 12x^3 - 4x + 5$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 2 – Fonctions usuelles

Pour  $x > 0$ ,  $f'(x) = -2/x^2 + 3/(2\sqrt{x})$ .

### Exercice 3 – Produit

$2x(x - 3) + (x^2 + 1) = 3x^2 - 6x + 1$ .

### Exercice 4 – Quotient

Pour  $x \neq -4$ ,  $[2(x + 4) - (2x + 1)]/(x + 4)^2 = 7/(x + 4)^2$ .

### Exercice 5 – Changement affine

$2(3x - 2) \times 3 = 18x - 12$ . On peut vérifier en développant.

### Exercice 6 – Signe simple

$f' = 2x - 4$ , négative avant 2, positive après. Minimum  $f(2) = -3$ .

### Exercice 7 – Cube décalé

$f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$  pour tout réel : fonction strictement croissante.

### Exercice 8 – Extrêmes locaux

$f' = 3(x - 2)(x + 2)$  : croissance avant  $-2$ , décroissance jusqu'à 2, puis croissance. Maximum local 16, minimum local  $-16$ .

### Exercice 9 – Tangente

$f(2) = 8$ ,  $f'(2) = 12$  :  $y = 12(x - 2) + 8 = 12x - 16$ .

### Exercice 10 – Deux intervalles

Domaine  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  ;  $f' = -1/(x - 1)^2 < 0$ . Décroissante séparément de part et d'autre de 1.

**Exercice 11 – Dérivée nulle**

$f$  est constante sur cet intervalle. Sa valeur ne peut pas être déterminée sans image connue.

**Exercice 12 – Un piège**

Non :  $f'(0) = 0$ , mais  $f'(x) = 3x^2 \geq 0$  sans changement de signe et  $x^3$  traverse 0.

**Exercice 13 – Optimisation d'aire**

$A' = 12 - 2x$  ; croissance jusqu'à 6, puis décroissance. Maximum 36 en 6.

**Exercice 14 – Borne du domaine**

$f' = 2x - 6 < 0$  sur le domaine. Minimum à la borne 2, égal à  $-8$ .

**Exercice 15 – Détecter l'erreur**

Il a multiplié les dérivées. La règle correcte donne  $2x(x+1) + x^2 = 3x^2 + 2x$ .

**Exercice 16 – Approfondissement : coût moyen**

$C' = 1 - 16/x^2 = (x-4)(x+4)/x^2$ . Décroissance jusqu'à 4, puis croissance : minimum 8.

**Exercice 17 – Approfondissement : bénéfice**

$B' = -4x + 20$  s'annule en 5, de signe  $+$  puis  $-$ . Maximum  $B(5) = 32$ .

**Exercice 18 – Approfondissement : paramètre**

La dérivée en 1 est  $2 + m$ . Elle est nulle pour  $m = -2$ .

**Exercice 19 – Approfondissement : comparaison**

La différence est  $(x-2)^2 \geq 0$ . Alternativement, étudier  $h' = 2x - 4$  : minimum nul en 2.

**Exercice 20 – Approfondissement : quotient et variations**

$f' = [2x(x+1) - x^2]/(x+1)^2 = x(x+2)/(x+1)^2 > 0$ . La fonction est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .