

Chapitre 04 – Cours

Dérivation, variations et optimisation

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Dériver sommes, produits et quotients
- Relier dérivée et variations
- Résoudre un problème d'optimisation

Les mots pour comprendre

Définition – La fonction dérivée

Sur un intervalle où f est dérivable, la fonction f' associe à x la pente de la tangente en x .

Définition – Un extremum local

Un maximum local est une valeur plus grande que les valeurs voisines ; un minimum local est plus petit. Il faut préciser le voisinage ou l'intervalle étudié.

1. Une fonction dérivée

Lorsqu'une fonction est dérivable en chaque point d'un intervalle, on peut associer à x le nombre $f'(x)$; cela définit la fonction dérivée. Il faut toujours distinguer le domaine de définition de f et le domaine sur lequel elle est dérivable.

Par exemple, $\sqrt{x}$ est définie en 0, mais la formule de sa dérivée $1/(2\sqrt{x})$ ne s'applique que pour $x > 0$. Les formules usuelles sont $(c)' = 0$, $(x)' = 1$, $(x^n)' = nx^{n-1}$ pour les puissances entières positives, $(1/x)' = -1/x^2$ pour $x \neq 0$ et $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$ pour $x > 0$.

Une formule n'a de sens que là où ses expressions sont définies.

2. Opérations sur les dérivées

Pour des fonctions dérivables u, v et un réel k , on dispose de

$$(u + v)' = u' + v', \quad (ku)' = ku', \quad (uv)' = u'v + uv'.$$

Si v ne s'annule pas, $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$. Le dénominateur est un carré positif sur le domaine : pour étudier le signe d'une telle dérivée, on peut souvent étudier seulement le numérateur. **Exemple résolu.** Pour $f(x) = (x+1)/(x-2)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$,

$$f'(x) = \frac{(x-2) - (x+1)}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0.$$

La fonction est donc strictement décroissante sur chacun des intervalles $] -\infty; 2[$ et $]2; +\infty[$.

Il serait incorrect de conclure qu'elle est décroissante sur un intervalle contenant sa valeur interdite. Pour une expression $f(ax+b)$, avec f dérivable, la dérivée est $af'(ax+b)$.

Cette règle permet de traiter de nombreux changements affines de variable sans mobiliser un calcul de composition plus général.

3. Dérivée et variations

Sur un intervalle, une dérivée positive ou nulle assure la croissance ; une dérivée négative ou nulle assure la décroissance. Si elle est strictement positive ou strictement négative, les variations sont strictes.

Une dérivée identiquement nulle sur un intervalle caractérise une fonction constante. Pour étudier les variations, on commence par le domaine, puis on calcule et factorise la dérivée.

On établit son tableau de signes et enfin celui de la fonction. On ne confond pas le signe de f et celui de f' : une fonction peut être négative tout en augmentant.

4. Extrema

Si la dérivée change de signe de $+$ vers $-$ en un point intérieur, la fonction y présente un maximum local ; de $-$ vers $+$, un minimum local.

Une dérivée nulle ne suffit pas à elle seule : x^3 a une dérivée nulle en 0 mais n'y atteint aucun extremum. **Exemple résolu.** Pour $f(x) = x^3 - 3x$, $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$. La fonction est croissante jusqu'à -1 , décroissante de -1 à 1 , puis croissante.

Elle a un maximum local $f(-1) = 2$ et un minimum local $f(1) = -2$.

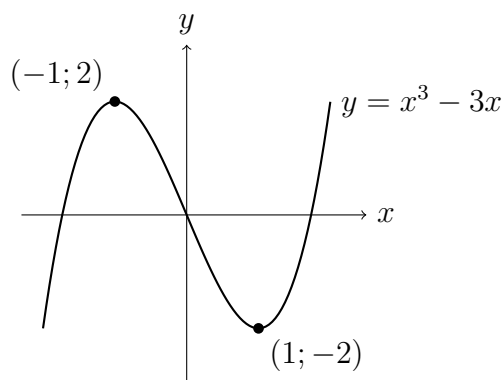
5. Optimiser dans un contexte

On choisit une variable et son domaine, on exprime la grandeur à optimiser, puis on utilise les variations. Sur un intervalle fermé, on compare aussi les valeurs aux bornes.

Le meilleur résultat sur tout $\mathbb{R}$ peut ne pas être autorisé dans le contexte. Pour une production entière, il peut être nécessaire de comparer les deux entiers voisins d'un optimum réel.

Erreurs fréquentes. Dériver un produit en multipliant les dérivées ; inverser les termes du numérateur d'un quotient ; oublier de mettre le dénominateur au carré ; annoncer un maximum sans vérifier le changement de signe ; négliger les unités de la réponse finale.

Voir la notion



On repère les changements de sens : le signe de la dérivée explique les variations.

Deux exemples, pas à pas

Exemple résolu – 1 – Changement affine

Question. Dériver $(3x - 2)^2$.

Résolution. $2(3x - 2) \times 3 = 18x - 12$. On peut vérifier en développant.

Exemple résolu – 2 – Deux intervalles

Question. Étudier $f(x) = 1/(x - 1)$.

Résolution. Domaine $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; $f' = -1/(x - 1)^2 < 0$. Décroissante séparément de part et d'autre de 1.
