

Chapitre 05 – Corrections

Fonction exponentielle

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Valeurs exactes

$$e^0 = 1 \text{ et } e^2 e^{-2} = e^0 = 1.$$

Exercice 2 – Produit

$$e^{3x+2x+1} = e^{5x+1}.$$

Exercice 3 – Quotient

Le dénominateur est non nul. Le quotient vaut $e^{4x+2-(x-3)} = e^{3x+5}$.

Exercice 4 – Puissance

$$e^{3(2x-1)} = e^{6x-3}.$$

Exercice 5 – Équation

Par injectivité, $2x + 1 = 7$, donc $x = 3$.

Exercice 6 – Inéquation

La fonction conserve l'ordre : $3x - 2 < x + 4 \iff x < 3$.

Exercice 7 – Signe

$e^x > 0$: l'expression est négative si $x < 5$, nulle en 5, positive si $x > 5$.

Exercice 8 – Dérivée

$$4e^{4x-7} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Exercice 9 – Dérivée négative

$-6e^{-2x}$, strictement négative : la fonction décroît.

Exercice 10 – Produit dérivé

$$e^x + xe^x = (x+1)e^x.$$

Exercice 11 – Tangente

$f(0) = 1$, $f'(0) = 1$; tangente $y = x + 1$.

Exercice 12 – Comparaison

$-3 < -1$ et l'exponentielle est croissante, donc $e^{-3} < e^{-1}$.

Exercice 13 – Aucun zéro

Aucune solution, car e^x est strictement positif pour tout réel.

Exercice 14 – Modèle

$Q(0) = 80$; $Q(t+1)/Q(t) = e^{0,2}$. Le taux sur une unité est $e^{0,2} - 1 \approx 22,14\%$.

Exercice 15 – Erreur à expliquer

Pour $a = b = 0$, cela donnerait $1 = 2$. La règle correcte est $e^{a+b} = e^a e^b$.

Exercice 16 – Approfondissement : variations

$f'(x) = (x-1)e^x$: décroissance avant 1, puis croissance. Minimum $f(1) = -e$.

Exercice 17 – Approfondissement : maximum

$f'(x) = (1-2x)e^{-2x}$: croissance jusqu'à $1/2$, puis décroissance. Maximum $1/(2e)$.

Exercice 18 – Approfondissement : équation factorisée

$e^x(e^x - 1) = 0$. Le premier facteur n'est jamais nul ; $e^x = 1 = e^0$, donc $x = 0$.

Exercice 19 – Approfondissement : comparer à la tangente

Posons $h(x) = e^x - 1 - x$. $h'(x) = e^x - 1$ est négative avant 0, positive après. Le minimum est $h(0) = 0$.

Exercice 20 – Approfondissement : rechercher un seuil

Par croissance, $0,5n > 3 \iff n > 6$. Le premier entier est 7.