

Chapitre 05 – Cours

Fonction exponentielle

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Utiliser les propriétés de $\exp$
- Dériver et comparer des exponentielles
- Construire un modèle continu

Les mots pour comprendre

Définition – L'exponentielle

La fonction exponentielle est la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$.
On note $f(x) = e^x$.

Définition – Une propriété fondamentale

Pour tous réels a et b , $e^{a+b} = e^a e^b$. Il s'agit d'un produit, et non de la somme $e^a + e^b$.

1. Une fonction remarquable

La fonction exponentielle, notée $\exp$ ou $x \mapsto e^x$, est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$. L'existence et l'unicité sont admises à ce niveau.

Le nombre $e = \exp(1)$ est environ 2,718. L'écriture e^x prolonge les propriétés des puissances à des exposants réels, mais ne signifie pas que l'on multiplie e par x .

L'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Elle n'est jamais nulle, même lorsque x est très négatif et que la valeur calculée semble proche de 0.

Une sortie de calculatrice arrondie n'est pas une preuve d'égalité exacte.

2. Propriétés algébriques

Pour tous réels a, b ,

$$e^{a+b} = e^a e^b, \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}.$$

Pour un entier n , $(e^a)^n = e^{na}$. En revanche, e^{a+b} n'est pas égal à $e^a + e^b$.

On peut contrôler cette erreur avec $a = b = 0$: le membre gauche vaut 1, la somme vaut 2.

2. Exemple résolu. $e^{3x}e^{2-x}/e^{x+1} = e^{3x+2-x-x-1} = e^{x+1}$. On additionne les exposants des produits et l'on soustrait ceux du dénominateur.

3. Variations et comparaisons

Puisque $(e^x)' = e^x > 0$, l'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Elle conserve donc l'ordre : $e^u < e^v$ si et seulement si $u < v$, et $e^u = e^v$ si et seulement si $u = v$. Ces propriétés permettent de résoudre des équations sans introduire le logarithme, qui sera étudié ultérieurement.

Le signe de $e^x - 1$ est ainsi celui de x . Une expression e^x est toujours positive, tandis qu'une expression $e^x - 3$ ne l'est pas nécessairement.

Pour étudier un produit avec une exponentielle, on peut souvent concentrer l'étude du signe sur les autres facteurs.

4. Dérivation

Si a, b sont réels, $(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$. Les règles de somme, produit et quotient restent valables.

Pour $f(x) = (x+1)e^x$, on obtient $f'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$. Puisque l'exponentielle est positive, le signe de la dérivée est celui de $x+2$. **Exemple résolu.** Pour $g(x) = xe^{-x}$, $g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$.

La fonction croît jusqu'à 1, puis décroît. Son maximum est $g(1) = e^{-1}$.

Si le contexte limite x à un intervalle, il faut comparer aussi les bornes.

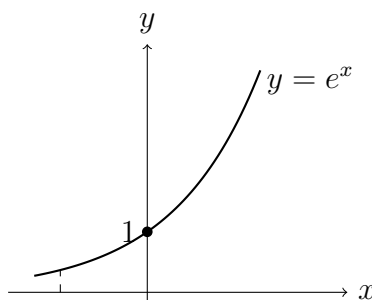
5. Modèles continus et discrets

Le modèle $Q(t) = Q_0 e^{kt}$ décrit une évolution continue de taux relatif instantané constant k . Pour une quantité initiale positive, il croît si $k > 0$ et décroît si $k < 0$.

Entre deux instants distants d'une unité, le coefficient multiplicateur est e^k : le taux d'évolution sur cette unité est $e^k - 1$, pas exactement k . Un modèle discret $u_n = u_0 q^n$ avec $q > 0$ peut être comparé à une évolution exponentielle, mais les indices entiers et le temps réel doivent rester distingués.

Pour un seuil qui ne se résout pas avec deux exponentielles de même base déjà identifiées, une recherche numérique ou algorithmique suffit en Première. **Points de vigilance.** Ne pas annuler une exponentielle ; ne pas distribuer l'exponentielle sur une somme ; conserver le facteur a dans la dérivée de e^{ax+b} ; annoncer clairement les arrondis et les unités d'un modèle.

Voir la notion



La courbe passe par $(0 ; 1)$ et reste strictement au-dessus de l'axe horizontal.

Deux exemples, pas à pas

Exemple résolu – 1 – Équation

Question. Résoudre $e^{2x+1} = e^7$.

Résolution. Par injectivité, $2x + 1 = 7$, donc $x = 3$.

Exemple résolu – 2 – Produit dérivé

Question. Dériver xe^x .

Résolution. $e^x + xe^x = (x + 1)e^x$.
