

Chapitre 06 – Cours

Trigonométrie : cercle, radians, sinus et cosinus

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Convertir degrés et radians
- Calculer des valeurs remarquables
- Résoudre des équations trigonométriques simples

Les mots pour comprendre

Définition – Le radian

Sur un cercle de rayon 1, un angle de 1 radian intercepte un arc de longueur 1. Un tour complet mesure 2π radians.

Définition – Sinus et cosinus

Le point du cercle trigonométrique associé à t possède les coordonnées $(\cos t; \sin t)$. Le cosinus est l'abscisse ; le sinus est l'ordonnée.

1. Enrouler la droite sur le cercle

Dans un repère orthonormé, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. À un réel x on associe un point du cercle par un parcours orienté de longueur x depuis le point $(1; 0)$.

La mesure x est alors exprimée en radians. Un tour complet correspond à 2π radians, soit 360° ; un demi-tour correspond à π radians.

Convertir des degrés en radians consiste à multiplier par $\pi/180$. Pour effectuer la conversion inverse, on multiplie par $180/\pi$.

Une longueur d'arc sur un cercle de rayon R vaut $R\theta$ lorsque θ est exprimé en radians. Cette formule ne s'applique pas directement avec un angle en degrés.

2. Définir sinus et cosinus

Le point associé à x a pour coordonnées $(\cos x; \sin x)$.

Le cosinus est donc l'abscisse, le sinus l'ordonnée. Puisque le point est sur le cercle unité,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1, \quad -1 \leq \sin x \leq 1.$$

Les valeurs remarquables du premier quadrant se déduisent de triangles rectangles particuliers : pour $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$, les cosinus sont respectivement $1, \sqrt{3}/2, \sqrt{2}/2, 1/2, 0$ et les sinus $0, 1/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{3}/2, 1$.

3. Symétries et périodicité

Après un tour entier, le point ne change pas : sinus et cosinus sont 2π -périodiques.

La symétrie par rapport à l'axe des abscisses donne $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$. La symétrie par rapport à l'axe des ordonnées donne $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Un demi-tour donne $\cos(x + \pi) = -\cos x$ et $\sin(x + \pi) = -\sin x$. Ces règles se comprennent en suivant les coordonnées du point ; elles évitent de mémoriser des signes sans raisonnement.

Exemple résolu. $5\pi/6 = \pi - \pi/6$ se situe dans le deuxième quadrant.

Son cosinus est $-\sqrt{3}/2$ et son sinus $1/2$.

4. Lire les courbes

Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ reproduisent les mêmes valeurs tous les 2π . Le cosinus vaut 1 en 0 et le sinus vaut 0.

Le sinus atteint 1 en $\pi/2$; le cosinus s'annule en $\pi/2$. Les bornes -1 et 1 permettent de vérifier qu'un résultat est plausible.

Pour étudier le signe sur un intervalle, on repère le quadrant et les points où l'une des coordonnées s'annule. Un dessin du cercle est souvent plus fiable qu'une liste de formules isolées.

5. Résoudre une équation

Sur le cercle, $\cos x = \cos a$ correspond à deux familles de positions : $x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

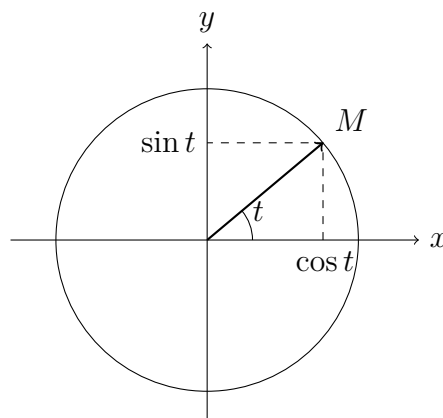
De même $\sin x = \sin a$ donne $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$. Certaines familles peuvent coïncider dans les cas particuliers.

Si l'on demande un intervalle donné, on ne conserve que les solutions qui y appartiennent.

Exemple résolu. Dans $[0; 2\pi[$, $\sin x = 1/2$ donne $x = \pi/6$ et $x = 5\pi/6$. **Vigilance.** Toujours régler la calculatrice en radians lorsque le problème utilise des radians. Un résultat approché ne remplace pas une valeur exacte demandée.

Ne pas confondre périodicité et parité, ni les solutions générales et celles d'un intervalle restreint.

Voir la notion



Ce schéma donne un exemple concret de la notion. Les indications permettent de relier le dessin et les écritures mathématiques.

Deux exemples, pas à pas

Exemple résolu – 1 – Angle négatif

Question. Calculer $\cos(-\pi/4)$ et $\sin(-\pi/4)$.

Résolution. Le cosinus est pair : $\sqrt{2}/2$; le sinus impair : $-\sqrt{2}/2$.

Exemple résolu – 2 – Cosinus un demi

Question. Résoudre $\cos x = 1/2$ sur $[0; 2\pi[$.

Résolution. $x = \pi/3$ ou $x = 5\pi/3$.
