

Chapitre 07 – Cours

Produit scalaire dans le plan

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Choisir une expression du produit scalaire
- Tester l'orthogonalité
- Calculer angles et longueurs

Les mots pour comprendre

Définition – Le produit scalaire

Le produit scalaire est un nombre. Dans un repère orthonormé, $(x; y) \cdot (x'; y') = xx' + yy'$.

Définition – L'orthogonalité

Deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul. Pour des directions de droites, les vecteurs doivent être non nuls.

1. Définition géométrique

Pour deux vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}$, leur produit scalaire est le réel $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$, où θ est l'angle non orienté entre eux. Si l'un des vecteurs est nul, le produit scalaire vaut 0.

Le résultat est un nombre, pas un vecteur. Il peut être positif, nul ou négatif selon que l'angle est aigu, droit ou obtus.

Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. Deux droites ayant ces vecteurs pour directions sont alors perpendiculaires.

Il faut distinguer orthogonalité et colinéarité : la première concerne un angle droit, la seconde une même direction.

2. Expression dans un repère orthonormé

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u} = (x; y)$ et $\vec{v} = (x'; y')$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy', \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Le mot orthonormé est indispensable. Avec des axes non perpendiculaires ou des unités différentes, cette formule ne s'applique pas telle quelle. **Exemple résolu.** Pour $\vec{u} = (2; 3)$ et $\vec{v} = (3; -2)$, le produit vaut $6 - 6 = 0$.

Les vecteurs sont orthogonaux. En revanche, leur déterminant vaut $-13 \neq 0$: ils ne sont pas colinéaires.

3. Propriétés algébriques

Le produit scalaire est symétrique : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

Il est distributif et compatible avec la multiplication par un réel : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(a\vec{u}) \cdot \vec{v} = a(\vec{u} \cdot \vec{v})$. Enfin $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

En développant le carré d'une norme, on obtient

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$. Une expression avec la différence donne aussi $\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.

4. Triangles et formule d'Al-Kashi

Dans un triangle ABC, on applique la dernière identité aux vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \widehat{BAC}.$$

C'est une généralisation de Pythagore : lorsque l'angle en A est droit, le cosinus vaut 0.

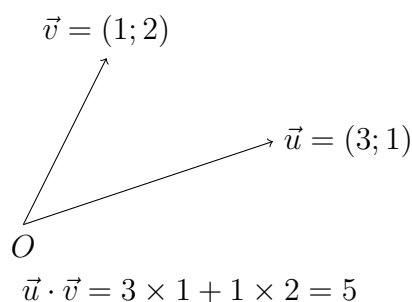
La formule permet de calculer un côté à partir de deux côtés et de l'angle compris, ou de retrouver un angle à partir des trois côtés. **Exemple résolu.** Si $AB = 3$, $AC = 4$ et l'angle en A vaut 60° , alors $BC^2 = 9 + 16 - 24 \times 1/2 = 13$, donc $BC = \sqrt{13}$.

5. Projection orthogonale

Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) , alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$. On peut utiliser des longueurs orientées le long de la droite : lorsque H est du côté opposé à B depuis A , le produit devient négatif.

La formule $AB \times AH$ avec des longueurs positives n'est donc valable sans signe supplémentaire que lorsque les déplacements ont le même sens. **Méthode.** Faire un croquis, choisir des vecteurs ayant une origine commune, identifier les données disponibles puis choisir coordonnées, angle, normes ou projection. Pour un angle calculé par un cosinus, contrôler que la valeur obtenue est comprise entre -1 et 1 et préciser l'arrondi.

Voir la notion



Ce schéma donne un exemple concret de la notion. Les indications permettent de relier le dessin et les écritures mathématiques.

Deux exemples, pas à pas

Exemple résolu – 1 – Angle connu

Question. Deux vecteurs ont pour normes 4 et 6 et font un angle de 60° . Calculer leur produit scalaire.

Résolution. $4 \times 6 \times 1/2 = 12$.

Exemple résolu – 2 – Produit par les normes

Question. $\|\vec{u}\|^2 = 5$, $\|\vec{v}\|^2 = 8$, $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 9$. Calculer le produit.

Résolution. $(5 + 8 - 9)/2 = 2$.
