

Chapitre 08 – Cours

Géométrie repérée : normales, projections et cercles

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Écrire une équation de droite avec un vecteur normal
- Calculer une projection
- Déterminer une équation de cercle

Les mots pour comprendre

Définition – Un vecteur normal

Un vecteur normal non nul est perpendiculaire à la direction de la droite. Pour $ax+by+c=0$, le vecteur $(a; b)$ est normal.

Définition – Un cercle

Un cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble des points à distance r de Ω : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

1. Vecteurs directeurs et normaux

Une droite du plan peut être définie par un point et un vecteur directeur non nul, ou par un point et un vecteur normal non nul. Un vecteur normal est perpendiculaire à la direction de la droite.

Dans un repère orthonormé, la droite passant par $A(x_A; y_A)$ et de vecteur normal $(a; b) \neq (0; 0)$ est l'ensemble des points M qui vérifient

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0.$$

On obtient une équation cartésienne $ax + by + c = 0$. Le couple $(a; b)$ est normal ; $(-b; a)$ est directeur.

Multiplier tous les coefficients par un réel non nul décrit la même droite. En revanche, modifier un coefficient seul change généralement la droite.

2. Appartenance et positions relatives

Pour tester un point, on remplace ses coordonnées dans l'équation.

Deux droites de normales colinéaires sont parallèles ou confondues ; on distingue ces cas en vérifiant l'appartenance d'un point ou la proportionnalité de toutes les équations. Pour une intersection, on résout le système des deux équations. **Exemple résolu.** La droite passant par $(1; 2)$ et de normale $(3; -1)$ a pour équation $3(x - 1) - (y - 2) = 0$, soit $3x - y - 1 = 0$.

Son coefficient directeur est 3 ; elle n'a pas une pente $-1/3$, car les coordonnées du vecteur normal ne sont pas celles d'un vecteur directeur.

3. Projection orthogonale sur une droite

Pour projeter un point P sur une droite d , on cherche un point H appartenant à d tel que $\overrightarrow{PH}$ soit colinéaire à une normale de d . Il s'agit de deux contraintes simultanées.

Cette méthode fonctionne aussi pour des droites verticales, où un coefficient directeur n'existe pas. **Exemple résolu.** Pour projeter $P(3; 4)$ sur $x + y - 2 = 0$, la normale est $(1; 1)$. Écrivons $H = (3 + t; 4 + t)$.

L'appartenance impose $3 + t + 4 + t - 2 = 0$, d'où $t = -5/2$ et $H = (1/2; 3/2)$. La distance PH vaut $\sqrt{(5/2)^2 + (5/2)^2} = 5\sqrt{2}/2$.

On peut ensuite justifier que cette distance est la plus petite en utilisant Pythagore dans le triangle PHM pour tout M de d : $PM^2 = PH^2 + HM^2 \geq PH^2$.

4. Équation d'un cercle

Le cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon $r > 0$ est défini par

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Cette équation traduit exactement une condition de distance. Si l'on donne une équation développée, on complète les carrés pour retrouver le centre et le carré du rayon.

Lorsque le nombre obtenu à droite est négatif, il n'existe aucun point réel ; s'il est nul, l'ensemble se réduit au centre. **Exemple résolu.** $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$ devient $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$. Le centre est $(3; -2)$ et le rayon 3.

Il ne faut pas confondre 9, carré du rayon, et le rayon lui-même.

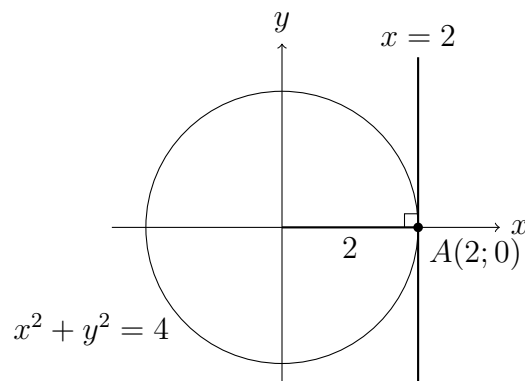
5. Croiser les méthodes

Pour une intersection droite-cercle, on peut remplacer une coordonnée dans l'équation du cercle, puis résoudre une équation du second degré. L'absence, l'unicité ou la présence de deux solutions correspond géométriquement à une droite extérieure, tangente ou sécante.

Une vérification finale dans les deux équations évite les erreurs de signe. **Vigilance.** Les expressions de distance et de produit scalaire supposent un repère orthonormé. Un vecteur directeur doit être non nul.

Une équation cartésienne n'est pas une identité vraie pour tous les points du plan : elle sélectionne un ensemble de points.

Voir la notion



Ce schéma donne un exemple concret de la notion. Les indications permettent de relier le dessin et les écritures mathématiques.

Deux exemples, pas à pas

Exemple résolu – 1 – Parallélisme

Question. Comparer $2x - y + 3 = 0$ et $4x - 2y + 1 = 0$.

Résolution. Les normales sont colinéaires, mais les constantes ne suivent pas le même facteur : droites strictement parallèles.

Exemple résolu – 2 – Compléter les carrés

Question. Identifier $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

Résolution. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$: centre $(2; -3)$, rayon 4.
