

Chapitre 09 – Cours

Probabilités conditionnelles et indépendance

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Lire un tableau et un arbre pondéré
- Appliquer les probabilités totales
- Distinguer indépendance et incompatibilité

Les mots pour comprendre

Définition – Une probabilité conditionnelle

Si $P(A) > 0$, la probabilité de B sachant A est $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. La population de référence est celle où A est réalisé.

Définition – L'indépendance

Les événements A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. L'indépendance ne signifie pas l'incompatibilité.

1. Changer de population de référence

Pour un événement A de probabilité strictement positive, la probabilité conditionnelle de B sachant A se note $P_A(B)$ ou $P(B | A)$ et vaut $P(A \cap B)/P(A)$. Elle décrit une expérience dans laquelle on sait déjà que A s'est réalisé.

Le dénominateur change donc : dans un tableau d'effectifs, on divise par l'effectif du groupe A , non par l'effectif total. On ne confond pas $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

La première utilise le groupe A , la seconde le groupe B ; leurs valeurs sont généralement différentes. La probabilité conditionnelle n'est définie que si l'événement conditionnant a une probabilité non nulle.

2. Construire un arbre

À la première étape, on indique les probabilités des événements A et $\bar{A}$.

À la seconde étape, chaque branche porte une probabilité conditionnelle dans le groupe atteint. Les probabilités issues d'un même nœud ont une somme de 1.

Le produit des probabilités le long d'un chemin donne celle de l'intersection représentée : $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$. Pour réunir plusieurs chemins incompatibles menant à B , on additionne leurs probabilités. **Exemple résolu.** Supposons $P(A) = 0,4$, $P_A(B) = 0,7$, $P_{\bar{A}}(B) = 0,2$.

Alors $P(A \cap B) = 0,28$ et $P(\bar{A} \cap B) = 0,12$. Leur réunion donne $P(B) = 0,40$.

En sens inverse, $P_B(A) = 0,28/0,40 = 0,7$.

3. Probabilités totales

Si A et $\bar{A}$ constituent les deux branches d'une partition,

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B).$$

Plus généralement, on peut utiliser une partition en plusieurs groupes disjoints dont la réunion est l'univers. Les probabilités conditionnelles requises supposent que les groupes utilisés sont de probabilité positive.

Un arbre n'autorise pas à additionner n'importe quelles branches : on additionne des événements incompatibles.

4. Indépendance

Les événements A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Si $P(A) > 0$, cela équivaut à $P_A(B) = P(B)$.

Connaître A ne modifie alors pas la probabilité de B . Il ne s'agit pas d'une absence de lien « dans la vie » mais d'une propriété mathématique dans un modèle donné.

Deux événements incompatibles ne peuvent pas se produire ensemble ; leur intersection est vide. S'ils ont tous deux une probabilité positive, ils ne sont pas indépendants : $0 = P(A \cap B)$ est alors différent de $P(A)P(B) > 0$.

5. Répéter une épreuve

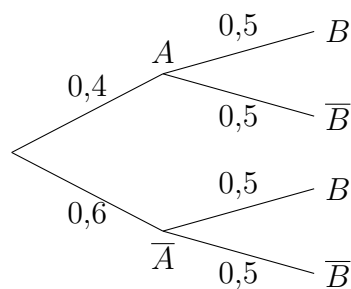
Une épreuve de Bernoulli a deux résultats, succès de probabilité p et échec de probabilité $1 - p$.

Pour une répétition indépendante d'épreuves identiques, la probabilité d'un chemin contenant k succès et $n - k$ échecs vaut $p^k(1 - p)^{n-k}$. En Première, on peut construire explicitement les petits arbres, notamment jusqu'à quatre répétitions.

Pour obtenir exactement un nombre de succès, il faut aussi compter les chemins correspondants. **Exemple résolu.** Pour deux essais indépendants avec $p = 0,3$, les chemins succès-échec et échec-succès ont chacun une probabilité 0,21. Exactement un succès a donc une probabilité de 0,42 ; au moins un succès a pour probabilité $1 - 0,7^2 = 0,51$. **Méthode.** Définir les événements en phrases, écrire les données avec leur sens conditionnel, compléter l'arbre, calculer les intersections puis répondre avec le bon dénominateur.

Toujours annoncer l'hypothèse d'indépendance des essais lorsque le modèle l'utilise.

Voir la notion



Exemple d'arbre : les probabilités issues de chaque nœud ont pour somme 1.

Deux exemples, pas à pas

Exemple résolu – 1 – Condition inverse

Question. Avec les mêmes données, calculer $P_B(A)$.

Résolution. $P(A \cap B) = 0,24$. Donc $P_B(A) = 0,24/0,52 = 6/13$.

Exemple résolu – 2 – Un seul succès

Question. Même situation : probabilité d'exactly un succès ?

Résolution. Deux chemins incompatibles : $2 \times 0,4 \times 0,6 = 0,48$.
