

Chapitre 10 – Corrections

Variables aléatoires : loi, espérance et dispersion

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Loi valide

Oui : elles sont positives et leur somme est 1.

Exercice 2 – Probabilité manquante

$$p = 1 - 1/4 - 1/3 = 5/12.$$

Exercice 3 – Espérance

$$E(X) = 0 + 1 + 1,5 = 2,5.$$

Exercice 4 – Second moment

$$0^2 \times 0,2 + 2^2 \times 0,5 + 5^2 \times 0,3 = 9,5.$$

Exercice 5 – Variance

$$V(X) = 9,5 - 2,5^2 = 3,25 = 13/4.$$

Exercice 6 – Écart-type

$$\sigma(X) = \sqrt{13}/2 \approx 1,80.$$

Exercice 7 – Dé

$$E(X) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)/6 = 3,5, \text{ qui n'est pas une valeur possible du dé.}$$

Exercice 8 – Bernoulli

$$E(X) = 0,3 ; V(X) = 0,3 \times 0,7 = 0,21.$$

Exercice 9 – Décalage

$$E(Y) = 11 \text{ et } V(Y) = 9 : \text{ un décalage ne change pas la dispersion.}$$

Exercice 10 – Multiplication

$$E(Y) = -8, V(Y) = 4 \times 9 = 36, \sigma(Y) = 6.$$

Exercice 11 – Gain net

Gain net 8 ou -2 . Espérance $8/5 - 8/5 = 0$: jeu équitable en espérance.

Exercice 12 – Loi d'une somme

$P(X = 0) = 1/4$, $P(X = 1) = 1/2$, $P(X = 2) = 1/4$, en regroupant PF et FP.

Exercice 13 – Espérance de cette somme

$$E(X) = 0/4 + 1/2 + 2/4 = 1.$$

Exercice 14 – Variable constante

$E(X) = 7$ et $V(X) = 0$, tous les écarts à la moyenne étant nuls.

Exercice 15 – Interpréter une moyenne

Non. C'est une moyenne théorique à long terme ; les gains de chaque partie suivent la loi du jeu et peuvent être très différents.

Exercice 16 – Approfondissement : mise équitable

L'espérance du versement est $12/6 = 2$. Une mise de 2 euros donne une espérance de gain net nulle.

Exercice 17 – Approfondissement : même moyenne

Les deux espérances sont nulles. $V(X) = 1$, $V(Y) = 100$: Y est beaucoup plus dispersée.

Exercice 18 – Approfondissement : paramètre

$$E(X) = -2 + 5p = 1, \text{ donc } p = 3/5, \text{ bien compris entre } 0 \text{ et } 1.$$

Exercice 19 – Approfondissement : transformation affine

$$E(Y) = 13 ; V(Y) = 36 ; \sigma(Y) = 6.$$

Exercice 20 – Approfondissement : variance de Bernoulli

Puisque $X^2 = X$ sur les valeurs 0, 1, $E(X^2) = p$. Ainsi $V(X) = p - p^2 = p(1 - p)$.