

## Chapitre 10 – Cours

### Variables aléatoires : loi, espérance et dispersion

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Construire une loi de probabilité finie
- Calculer espérance et variance
- Interpréter un jeu et une simulation

### Les mots pour comprendre

---

#### Définition – Une variable aléatoire

Une variable aléatoire réelle associe un nombre à chaque issue d'une expérience. Sa loi indique les valeurs possibles et leurs probabilités.

---

---

#### Définition – L'espérance

Pour une loi finie,  $E(X) = \sum_i x_i p_i$ . C'est une moyenne théorique pondérée, et non une valeur garantie pour une expérience isolée.

---

## 1. Associer un nombre à une issue

Une variable aléatoire réelle associe un réel à chaque issue d'une expérience. Elle peut représenter un gain, un nombre de succès ou une dépense.

Dans ce chapitre, elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Sa loi de probabilité indique ces valeurs  $x_i$  et leurs probabilités  $p_i = P(X = x_i)$ , toutes positives ou nulles, dont la somme vaut 1.

Pour construire une loi, on décrit d'abord les issues de l'expérience et leurs probabilités. Plusieurs issues peuvent donner la même valeur de  $X$  : il faut additionner leurs probabilités.

Les valeurs de  $X$  ne sont pas nécessairement équiprobables, même lorsque les issues élémentaires le sont.

## 2. Espérance

L'espérance est la moyenne pondérée des valeurs :  $E(X) = \sum_i x_i p_i$ . Elle correspond à une moyenne théorique à long terme dans un modèle de répétitions, non à une valeur garantie lors d'une seule expérience.

Elle peut ne pas être une valeur possible de  $X$ . **Exemple résolu.** Un gain vaut  $-2$  avec probabilité  $3/4$  et  $6$  avec probabilité  $1/4$ . Son espérance est  $(-2) \times 3/4 + 6 \times 1/4 = 0$ .

Le jeu est équitable au sens de l'espérance, mais chaque partie fait perdre  $2$  ou gagner  $6$  : personne ne reçoit nécessairement  $0$ . Si l'on considère un gain net, il faut soustraire la mise au montant reçu.

Oublier la mise change l'analyse économique du jeu. Une espérance positive ne supprime pas le risque de perte à court terme.

## 3. Variance et écart-type

La variance mesure les carrés des écarts à l'espérance :

$$V(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 p_i.$$

Elle est positive ou nulle.

Une forme pratique est  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ . Pour la calculer, on utilise les carrés des valeurs dans  $E(X^2)$  : on ne confond pas  $E(X^2)$  avec  $E(X)^2$ .

L'écart-type est  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ . Il s'exprime dans la même unité que  $X$ , tandis que la variance s'exprime dans l'unité au carré.

Deux variables peuvent avoir la même espérance et des dispersions différentes. **Exemple résolu.** Pour  $X$  égal à  $0$  ou  $2$ , chacun avec probabilité  $1/2$ ,  $E(X) = 1$ ,  $E(X^2) = 2$ ,  $V(X) = 1$  et  $\sigma(X) = 1$ .

## 4. Transformation d'une variable

Si  $Y = aX + b$ , alors  $E(Y) = aE(X) + b$ . En développant les écarts à l'espérance, on obtient aussi  $V(Y) = a^2 V(X)$  et  $\sigma(Y) = |a| \sigma(X)$ .

Ajouter une constante décale toutes les valeurs sans modifier leur dispersion ; multiplier par un réel modifie les distances à la moyenne par sa valeur absolue. Une variable de Bernoulli vaut  $1$  pour un succès de probabilité  $p$ ,  $0$  sinon.

Son espérance vaut  $p$  et sa variance  $p(1 - p)$ . Ces résultats se vérifient directement à partir des deux valeurs.

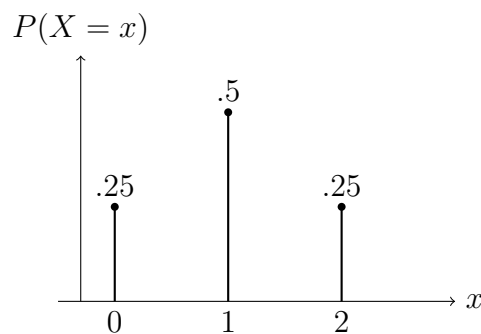
## 5. Simulation et interprétation

Pour simuler une variable finie, on peut découper l'intervalle  $[0; 1[$  en morceaux de longueurs  $p_i$ , tirer un réel uniforme et retourner la valeur associée au morceau atteint.

Sur un grand nombre de répétitions indépendantes, on compare les fréquences à la loi et la moyenne des valeurs à l'espérance. Les résultats observés fluctuent : une simulation n'est pas une démonstration d'une égalité de probabilités. **Méthode.** Vérifier d'abord la somme des probabilités ; calculer ensuite  $E(X)$  et  $E(X^2)$  ; en déduire la variance et l'écart-type ; enfin interpréter en conservant le contexte et les unités.

Un résultat de variance négatif révèle une erreur de calcul ou un arrondi prématuré.

### Voir la notion



Chaque bâton porte la probabilité d'une valeur. La somme des hauteurs vaut 1.

### Deux exemples, pas à pas

---

#### Exemple résolu – 1 – Variance

**Question.** En déduire la variance de la même variable.

**Résolution.**  $V(X) = 9,5 - 2,5^2 = 3,25 = 13/4$ .

---



---

#### Exemple résolu – 2 – Multiplication

**Question.** Mêmes données,  $Y = -2X$ . Donner  $E(Y)$ ,  $V(Y)$ ,  $\sigma(Y)$ .

**Résolution.**  $E(Y) = -8$ ,  $V(Y) = 4 \times 9 = 36$ ,  $\sigma(Y) = 6$ .

---