

Chapitre 15 – Cours

Arithmétique : divisibilité, parité et nombres premiers

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Utiliser la division euclidienne et les critères de divisibilité.
- Décomposer en facteurs premiers et rendre une fraction irréductible.
- Démontrer une propriété de parité et programmer un test de divisibilité.

Les mots pour comprendre

Définition – La divisibilité

Un entier a divise un entier b s'il existe un entier k tel que $b = ak$.

Définition – Un nombre premier

Un nombre premier est un entier au moins égal à 2 qui possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

1. Divisibilité et division euclidienne

Pour des entiers a et b , on dit que a divise b lorsqu'il existe un entier k tel que $b = ak$. Pour un diviseur non nul, cette définition permet de relier une multiplication à une division exacte.

Par exemple 7 divise 84 car $84 = 7 \times 12$. Tous les entiers divisent 0, mais 0 ne divise aucun entier non nul.

Pour $a \in \mathbb{N}$ et b entier strictement positif, la division euclidienne s'écrit $a = bq + r$, où $q, r \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < b$. Le nombre a est divisible par b exactement lorsque $r = 0$.

La contrainte sur le reste distingue cette écriture d'une simple décomposition.

2. Critères et nombres premiers

Un entier est divisible par 2 si son chiffre des unités est pair, par 5 s'il se termine par 0 ou 5, par 3 ou 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 ou 9. Ces critères portent sur l'écriture décimale du nombre.

Un nombre premier possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même. Ainsi 2 est premier, tandis que 1 ne l'est pas.

Pour tester un entier $n > 1$, il suffit de chercher un diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$: si $n = ab$ avec $1 < a \leq b$, alors $a^2 \leq n$. L'absence de diviseur dans cette zone prouve la primalité ; l'absence d'un seul petit diviseur ne suffit pas.

3. Décomposition et fractions

Tout entier supérieur à 1 se décompose en produit de nombres premiers, de manière unique à l'ordre des facteurs près.

Par exemple $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$. Cette décomposition permet de déterminer des diviseurs, de comparer des multiples et de simplifier des fractions.

On ne simplifie que des facteurs communs au numérateur et au dénominateur : $84/126 = (2 \times 2 \times 3 \times 7)/(2 \times 3 \times 3 \times 7) = 2/3$.

4. Raisonner sur la parité

Un entier pair s'écrit $2k$, un entier impair $2k + 1$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Ce langage donne une preuve valable pour tous les entiers.

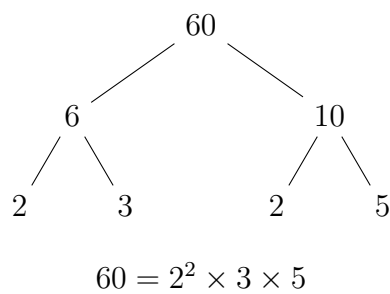
Le carré d'un impair vaut $(2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$: il est impair. Vérifier quelques exemples suggère cette propriété, mais ne la démontre pas.

5. Méthode et contrôle

Dans un problème de regroupement, on détermine d'abord si l'on cherche un diviseur commun ou un multiple commun.

On vérifie ensuite le résultat dans les deux collections ou les deux périodicités. En Python, `a % b` renvoie le reste pour $b > 0$; le test `a % b == 0` exprime la divisibilité.

Le code doit toujours préciser le domaine de ses entrées.

Voir la notion

Ce schéma donne un exemple concret de la notion. Les indications permettent de relier le dessin et les écritures mathématiques.

Deux exemples, pas à pas

Exemple résolu – 1 – Décomposition

Question. Décomposer 252 en facteurs premiers.

Résolution. $252 = 4 \times 63 = 2^2 \times 3^2 \times 7$.

Exemple résolu – 2 – Divisibilité et somme

Question. Si 7 divise a et b , prouver qu'il divise $a + b$.

Résolution. Écrire $a = 7u$, $b = 7v$. Alors $a + b = 7(u + v)$, avec $u + v$ entier.
