

Chapitre 16 – Cours

Écritures numériques, puissances, racines et approximations

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Distinguer valeur exacte, écriture décimale et approximation.
- Calculer avec puissances et racines en respectant les domaines.
- Encadrer un résultat et maîtriser une erreur absolue.

Les mots pour comprendre

Définition – Un nombre décimal

Un nombre décimal possède une écriture décimale finie. Il peut s'écrire comme une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10.

Définition – Une approximation

Une approximation remplace un nombre par une valeur proche. On précise le rang ou la précision et on utilise $\approx$ lorsque l'égalité n'est pas exacte.

1. Les écritures d'un nombre

Un nombre décimal possède une écriture décimale finie ; il s'écrit aussi $a/10^n$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Tout décimal est rationnel, mais tout rationnel n'est pas décimal : $1/3$ ne possède pas d'écriture décimale finie.

Une écriture exacte et une approximation ne doivent pas être reliées par le signe égal. On écrit $1/3 \approx 0,333$, et non $1/3 = 0,333$.

Une fraction irréductible a/b , avec $b > 0$, représente un décimal si le dénominateur ne comporte que les facteurs premiers 2 et 5. Par exemple $7/40$ est décimal car $40 = 2^3 \times 5$.

L'écriture scientifique d'un nombre non nul est $a \times 10^n$, avec $1 \leq |a| < 10$ et $n \in \mathbb{Z}$.

2. Puissances

Pour $a \neq 0$ et $n > 0$, $a^{-n} = 1/a^n$ et $a^0 = 1$. À conditions d'existence fixées, $a^p a^q = a^{p+q}$, $a^p / a^q = a^{p-q}$ et $(a^p)^q = a^{pq}$.

On ne remplace pas une somme de puissances par une puissance de somme : $2^3 + 2^3 = 16$, alors que $2^6 = 64$. Les parenthèses sont essentielles : $(-3)^2 = 9$ mais $-3^2 = -9$.

3. Racines carrées

Pour $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ est l'unique réel positif ou nul dont le carré est a .

Ainsi $\sqrt{a^2} = |a|$, et non toujours a . Pour $a, b \geq 0$, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$; pour $b > 0$, $\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$.

En revanche, la racine d'une somme n'est généralement pas la somme des racines. Extraire un carré parfait donne par exemple $\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$.

4. Arrondir et encadrer

L'arrondi au centième choisit le centième le plus proche.

Pour un réel dont la troisième décimale est strictement inférieure à 5, on conserve les deux premières ; sinon on augmente le centième selon la convention usuelle. On distingue cette opération de la troncature.

Les chiffres significatifs commencent au premier chiffre non nul : 0,00470 comporte trois chiffres significatifs. Une approximation a de x a pour erreur absolue $|x - a|$.

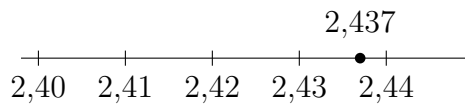
Si a est un arrondi au centième, cette erreur est au plus 0,005. Pour sécuriser un calcul, on peut encadrer les données et propager les bornes, en prenant garde au signe des nombres et au sens des inégalités.

5. Méthode

On commence par simplifier exactement les fractions, puissances ou racines.

On conserve ensuite suffisamment de décimales intermédiaires, puis on arrondit seulement la réponse finale. Un ordre de grandeur permet de détecter une virgule mal placée et une unité incohérente.

Voir la notion



Ce schéma donne un exemple concret de la notion. Les indications permettent de relier le dessin et les écritures mathématiques.

Deux exemples, pas à pas

Exemple résolu – 1 – Parenthèses

Question. Comparer $(-4)^2$ et -4^2 .

Résolution. $(-4)^2 = 16$; $-4^2 = -(4^2) = -16$. Le carré porte sur des expressions différentes.

Exemple résolu – 2 – Arrondis

Question. Arrondir 12,3764 au dixième puis au centième.

Résolution. Au dixième : 12,4 ; au centième : 12,38. On examine le chiffre suivant le rang demandé.
