Chapitre 17 – Cours

Fonctions valeur absolue, racine carrée et cube

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Connaître les domaines et variations de trois fonctions de référence.
- Résoudre des équations et inéquations sans dérivation.
- Traduire une distance et contrôler les solutions obtenues.

Les mots pour comprendre

Définition – L'image d'un nombre

Pour une fonction f, l'image de a est le nombre $f(a)$. Une même image peut avoir plusieurs antécédents.

Définition – Une fonction de référence

Une fonction de référence sert de modèle connu : carré, cube, inverse, racine carrée ou valeur absolue. Son domaine fait partie de sa définition.

1. La fonction valeur absolue

La valeur absolue d'un réel est sa distance à zéro. Elle se définit par $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$.

La fonction $x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$, positive ou nulle, paire, décroissante sur $]-\infty; 0]$ puis croissante sur $[0; +\infty[$. Sa courbe est formée de deux demi-droites se rejoignant à l'origine.

Son minimum est 0, atteint seulement en 0. L'expression $|x - a|$ mesure la distance de x à a.

Pour $r \geq 0$, l'inégalité $|x - a| \leq r$ équivaut à $a - r \leq x \leq a + r$. Pour $r > 0$, l'équation $|x - a| = r$ possède deux solutions $a - r$ et $a + r$.

Pour un second membre négatif, aucune valeur absolue ne peut être égale à ce nombre.

2. La fonction racine carrée

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0; +\infty[$. Elle est strictement croissante et prend des valeurs positives ou nulles.

Les points $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(4; 2)$ et $(9; 3)$ servent de repères pour tracer son allure. Pour $k \geq 0$, $\sqrt{x} = k$ équivaut à $x = k^2$.

Pour $k < 0$, l'équation n'a pas de solution. Résoudre une inéquation avec une racine exige de conserver la condition d'existence.

Ainsi $\sqrt{x-1} \leq 3$ impose $x \geq 1$, puis équivaut à $x - 1 \leq 9$, d'où $1 \leq x \leq 10$. Élever au carré sans vérifier les signes peut créer de fausses solutions : les deux membres doivent être positifs ou nuls pour que cette opération conserve l'équivalence.

3. La fonction cube

La fonction $x \mapsto x^3$ est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Elle est impaire : $(-x)^3 = -x^3$. Elle n'a pas de minimum ni de maximum sur tout $\mathbb{R}$.

Les images de $-2, -1, 0, 1, 2$ sont $-8, -1, 0, 1, 8$. La croissance permet de résoudre $x^3 \leq 8$ directement : cela équivaut à $x \leq 2$.

Contrairement au carré, un cube peut être négatif. On ne doit donc pas proposer deux antécédents opposés à une valeur non nulle : $x^3 = 8$ a seulement pour solution 2.

4. Comparer et représenter

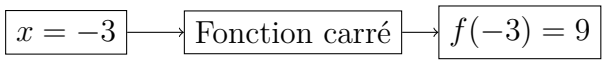
Les comparaisons se justifient à partir du domaine et du sens de variation.

Pour des nombres négatifs, le carré renverse l'ordre alors que le cube le conserve. Les fonctions racine et carré sont liées sur les positifs : $\sqrt{x^2} = x$ lorsque $x \geq 0$.

Cette égalité devient $\sqrt{x^2} = |x|$ sur $\mathbb{R}$. Une lecture graphique fournit une conjecture ou une approximation.

Une résolution algébrique peut ensuite confirmer exactement les intersections et les intervalles solutions. On termine toujours en vérifiant que les valeurs proposées appartiennent au domaine initial.

Voir la notion



Un nombre de départ possède une seule image.

Ce schéma donne un exemple concret de la notion. Les indications permettent de relier le dessin et les écritures mathématiques.

Deux exemples, pas à pas

Exemple résolu – 1 – Second membre négatif

Question. Résoudre $|x| = -2$ et $|x| \geq -2$.

Résolution. La première n'a aucune solution ; la seconde est vraie pour tout réel puisque $|x| \geq 0$.

Exemple résolu – 2 – Comparaison

Question. Comparer $\sqrt{12}$ et $\sqrt{13}$, puis $\sqrt{0{,}4}$ et $\sqrt{0{,}3}$.

Résolution. La racine est croissante : $\sqrt{12} < \sqrt{13}$ et $\sqrt{0{,}4} > \sqrt{0{,}3}$.