Chapitre 18 – Cours

Proportions, pourcentages et évolutions

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Calculer une proportion de proportion.
- Composer et inverser des évolutions.
- Distinguer pourcentage et point de pourcentage.

Les mots pour comprendre

Définition – Une proportion

Une proportion est le rapport entre la taille d'une partie et la taille totale de la population considérée.

Définition – Une évolution successive

Deux évolutions successives de taux t_1 et t_2 ont pour coefficient global $(1 + t_1)(1 + t_2)$. On multiplie les coefficients ; on n'additionne pas les taux.

1. Une proportion dépend de sa population de référence

Si une sous-population compte a individus dans une population de N individus, avec $N > 0$, sa proportion vaut $p = a/N$. Un pourcentage est une écriture de cette proportion : $35\% = 0{,}35$.

Pour retrouver une partie, on multiplie le tout par la proportion ; pour retrouver le tout à partir de la partie, on divise par la proportion non nulle. Lorsque des populations sont emboîtées, les proportions se multiplient.

Si 60% des élèves suivent un atelier et que 25% des participants choisissent le théâtre, la proportion de tous les élèves concernés par le théâtre vaut $0{,}60 \times 0{,}25 = 0{,}15$, soit 15%. On précise les références à chaque étape pour ne pas confondre la proportion parmi les participants avec celle parmi tous les élèves.

2. Variation absolue et variation relative

Pour passer de V_i à V_f, la variation absolue est $V_f - V_i$.

Lorsque $V_i \neq 0$, le taux d'évolution est $t = (V_f - V_i)/V_i$. Dans les situations usuelles de prix ou d'effectifs, on travaille avec $V_i > 0$.

Le coefficient multiplicateur vaut $c = V_f/V_i = 1 + t$. Ainsi une hausse de 12% correspond au facteur 1,12, une baisse de 12% au facteur 0,88.

Une proportion et un taux d'évolution sont deux notions différentes. Une population peut représenter 20% d'un ensemble sans avoir augmenté de 20%.

On lit la formulation et les deux valeurs de référence avant tout calcul.

3. Évolutions successives

Si deux évolutions de taux t_1, t_2 se succèdent, le coefficient global est $(1 + t_1)(1 + t_2)$; le taux global est ce produit moins 1. On ne somme généralement pas les deux taux.

Après une hausse de 10% puis une baisse de 10%, le facteur vaut $1{,}10 \times 0{,}90 = 0{,}99$: la valeur initiale a diminué de 1%. La méthode s'étend à un nombre quelconque d'étapes en multipliant leurs coefficients.

Elle évite des arrondis intermédiaires et permet de retrouver une valeur initiale à partir d'une valeur finale.

4. Évolution réciproque

Pour annuler un coefficient multiplicateur $c > 0$, on applique $1/c$. Le taux réciproque vaut donc $1/c - 1$.

Une baisse de 20% donne $c = 0{,}8$; pour revenir à la valeur de départ, il faut multiplier par 1,25, soit augmenter de 25%. Les pourcentages opposés ne se compensent pas, car ils portent sur des bases différentes.

5. Interpréter les chiffres

Passer d'une proportion de 30% à 36% représente 6 points de pourcentage, mais une hausse relative de $6/30 = 20\%$.

Une réponse doit préciser s'il s'agit de points ou de pourcents. On contrôle enfin la vraisemblance : une baisse de plus de 100% n'a pas de sens pour un prix restant positif, et

un taux d'évolution n'est pas défini lorsque la valeur initiale est nulle.

Voir la notion

$\frac{3}{10} = 0{,}3 = 30\%$ de la bande est marquée.

Ce schéma donne un exemple concret de la notion. Les indications permettent de relier le dessin et les écritures mathématiques.

Deux exemples, pas à pas

Exemple résolu – 1 – Hausse simple

Question. Un prix de 75 euros augmente de 8%. Calculer le nouveau prix.

Résolution. $75 \times 1{,}08 = 81$ euros.

Exemple résolu – 2 – Hausse puis baisse

Question. Calculer le taux global d'une hausse de 25% suivie d'une baisse de 20%.

Résolution. $1{,}25 \times 0{,}80 = 1$: le taux global est nul.