

Chapitre 21 – Cours

Probabilités conditionnelles et arbres pondérés

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Calculer une probabilité sachant un événement de probabilité non nulle.
- Construire et exploiter un arbre pondéré.
- Distinguer deux conditionnements inverses et interpréter un résultat.

Les mots pour comprendre

Définition – Le conditionnement

Si $P(A) > 0$, on note $P_A(B)$ la probabilité de B lorsque l'on sait que A est réalisé.

Définition – La règle d'un chemin

Dans un arbre, $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$. Les probabilités le long du chemin se multiplient.

1. Changer l'univers de référence

Une probabilité conditionnelle répond à une question de la forme « quelle est la probabilité de B sachant que A est réalisé ? ». Lorsque $P(A) > 0$, on la note $P_A(B)$ et on la définit par $P_A(B) = P(A \cap B)/P(A)$.

Dans une population finie où chaque individu a la même chance d'être choisi, ce quotient devient $\text{Card}(A \cap B)/\text{Card}(A)$: on restreint la référence à A . La condition $P(A) > 0$ est indispensable.

La formule ne définit pas une probabilité sachant un événement impossible. Le calcul reste compris entre 0 et 1 car $A \cap B$ est inclus dans A .

Le complémentaire se calcule dans la même référence : $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$.

2. Revenir à l'intersection

La définition se réécrit $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$. On multiplie donc la probabilité d'atteindre un premier groupe par la probabilité conditionnelle de la seconde caractéristique dans ce groupe.

Si $P(A) = 0,4$ et $P_A(B) = 0,7$, alors $P(A \cap B) = 0,28$. Le produit $P(A)P(B)$ n'est pas automatiquement égal à cette intersection.

Il faudrait une hypothèse supplémentaire. En seconde, on explicite surtout le modèle choisi et les probabilités associées aux branches, sans confondre des tirages avec ou sans remise.

3. Construire un arbre

Un arbre pondéré commence, par exemple, par A et son contraire.

À partir de chacune de ces branches, on place B et son contraire. Les probabilités de branches issues d'un même nœud totalisent 1.

Un chemin complet représente une intersection et sa probabilité est le produit des poids rencontrés. Lorsque $0 < P(A) < 1$, l'événement B se décompose en deux cas disjoints : $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$.

On additionne leurs probabilités : $P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$. Cette formule exprime une décomposition en cas, et non une addition arbitraire de probabilités conditionnelles.

4. Inverser un conditionnement

Connaître $P_A(B)$ ne donne pas directement $P_B(A)$.

Si $P(B) > 0$, on calcule d'abord l'intersection puis $P_B(A) = P(A \cap B)/P(B)$. Dans un dépistage fictif, la probabilité d'un résultat positif chez une personne possédant une caractéristique n'est pas la probabilité de posséder cette caractéristique après un résultat positif.

La fréquence de la caractéristique dans la population intervient dans ce second calcul.

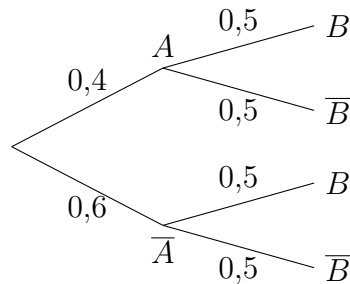
5. Modéliser avec prudence

Les probabilités des exercices décrivent des situations fictives. Dans une situation réelle, elles reposent sur des hypothèses ou sur des données estimées.

Une probabilité n'est pas une certitude individuelle. On peut comparer les fréquences d'une simulation au modèle, mais les fluctuations observées ne disparaissent pas à taille finie.

Les intervalles systématiques $p \pm 1/\sqrt{n}$ ne sont pas un attendu du programme 2026 et ne remplacent pas l'explicitation des conditions d'un outil statistique.

Voir la notion



Exemple d'arbre : les probabilités issues de chaque nœud ont pour somme 1.

Deux exemples, pas à pas

Exemple résolu – 1 – Condition impossible

Question. Si $P(A) = 0$, peut-on appliquer $P_A(B) = P(A \cap B)/P(A)$?

Résolution. Non : le dénominateur est nul. Cette formule ne définit pas le conditionnement.

Exemple résolu – 2 – Inversion

Question. Dans la situation précédente, calculer $P_B(A)$.

Résolution. $P(A \cap B) = 0,28$ et $P(B) = 0,40$. Donc $P_B(A) = 0,28/0,40 = 0,7$.
