

Chapitre 01 – Cours

Suites, modèles discrets et limites

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Modéliser une évolution discrète
- Étudier les suites géométriques et les récurrences affines

Comprendre les notions

Choisir un modèle

Définition – Notion de départ

Une suite décrit une grandeur observée à des dates entières. Une augmentation constante conduit à une suite arithmétique, $u_{n+1} = u_n + r$ et $u_n = u_0 + nr$. Une évolution de taux constant conduit à une suite géométrique, $u_{n+1} = qu_n$ et $u_n = u_0q^n$. Le coefficient q est égal à un plus le taux exprimé sous forme décimale. Un pourcentage de baisse n'est donc pas une quantité fixe retirée chaque année.

Convergence et sommes

Propriété – Lecture et conséquences

Pour une raison positive q , q^n tend vers zéro si q est inférieur à un, reste égal à un pour q égal à un, et tend vers l'infini si q est supérieur à un. La somme $1 + q + \dots + q^n$ vaut $(1 - q^{n+1})/(1 - q)$ si q est différent de un. Pour $0 < q < 1$, elle tend vers $1/(1 - q)$. Une suite arithmético-géométrique vérifie $u_{n+1} = au_n + b$. Si a est différent de un, son point fixe est $L = b/(1 - a)$ et la suite $v_n = u_n - L$ est géométrique de raison a .

Première lecture : situation du chapitre

Propriété – Lecture et conséquences

Un compte évolue selon $u_{n+1} = 0,9u_n + 20$, avec $u_0 = 0$. Le point fixe vaut deux cents, puis $u_n = 200(1 - 0,9^n)$. Le solde augmente vers deux cents sans le dépasser. Un problème de seuil peut se résoudre par des essais organisés, un tableur, un programme ou des logarithmes. La formalisation complète de la convergence n'est pas l'objectif de cette option ; les calculs doivent rester reliés au phénomène modélisé.

Un modèle affine et son équilibre

Définition – Un modèle affine et son équilibre

Une évolution affine combine une part proportionnelle au stock déjà présent et un apport constant. Pour $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$, le niveau d'équilibre est le nombre qui resterait inchangé d'une étape à l'autre.

$$L = \frac{b}{1-a}, \quad u_n = L + (u_0 - L)a^n.$$

Si $0 < a < 1$, l'écart à L diminue géométriquement. Ce comportement permet de prévoir un niveau de stabilisation et de résoudre des questions de seuil sans formaliser une théorie générale de la convergence.

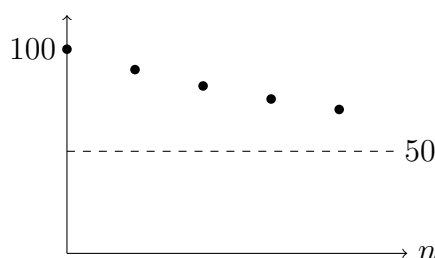
Deux exemples résolus

Exemple résolu – Un stock renouvelé

1. Un bassin contient initialement cent litres. Chaque jour, on retire vingt pour cent du contenu puis on ajoute dix litres : $u_{n+1} = 0,8u_n + 10$.
 2. L'équilibre vérifie $L = 0,8L + 10$, donc $L = 50$. La suite $u_n - 50$ est géométrique et $u_n = 50 + 50 \times 0,8^n$.
 3. Les quantités décroissent vers cinquante litres sans passer en dessous. L'ordre des opérations compte : ajouter avant le retrait aurait donné un autre apport effectif.
-

Exemple résolu – Un seuil entier

1. Un équipement vaut mille euros et perd vingt pour cent de sa valeur chaque année : $v_n = 1000 \times 0,8^n$. On cherche quand sa valeur devient inférieure à cinq cents euros.
 2. Les premières valeurs sont mille, huit cents, six cent quarante, cinq cent douze, puis quatre cent neuf euros et soixante centimes.
 3. Le premier rang convenable est quatre. La valeur au rang trois ne satisfait pas la condition ; cette vérification assure qu'il s'agit du premier franchissement.
-

Une représentation pour comprendre

Le stock part de cent et se rapproche de cinquante ; seuls les rangs entiers sont représentés.

Le graphique représente une suite par des points séparés : les observations ont lieu à des dates entières. Relier les points n'ajoute aucune information sur les évolutions entre deux dates. Une droite horizontale peut représenter un équilibre sans que celui-ci soit atteint à une date finie. Dans un modèle économique ou biologique, le coefficient multiplicateur doit correspondre à la durée d'une étape.

Deux augmentations successives de dix pour cent donnent un coefficient $1,1^2 = 1,21$, soit vingt et un pour cent sur les deux étapes. Additionner les taux négligerait l'évolution de la base de calcul.

À retenir – Mini-bilan

Une différence constante conduit à un modèle arithmétique ; un taux constant à un modèle géométrique. Pour une récurrence affine, chercher l'équilibre puis suivre l'écart. Interpréter les dates, les unités et le premier rang de franchissement.
