Chapitre 02 – Cours

Fonctions, limites, continuité et logarithme

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Étudier une fonction et identifier une asymptote
- Résoudre avec le logarithme et exploiter la continuité

Comprendre les notions

Limites et continuité

Définition – Notion de départ

Une limite décrit le comportement d'une fonction près d'une borne ou à l'infini. L'approche est intuitive, appuyée sur les courbes et les fonctions de référence : carré, cube, racine, inverse, exponentielle et logarithme. Les règles opératoires sont admises lorsque les expressions ne sont pas indéterminées. Une fonction continue sur un intervalle prend toutes les valeurs intermédiaires ; si elle est strictement monotone, une valeur de son image possède un unique antécédent.

Fonctions réciproques

Propriété – Lecture et conséquences

L'exponentielle associe à tout réel une valeur strictement positive. Le logarithme népérien effectue le chemin inverse : $\ln(e^x) = x$ et $e^{\ln x} = x$ pour x positif. Les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation y=x. Le logarithme est croissant, de dérivée $1/x$, et possède des limites infinies en zéro positif et à l'infini. Pour des réels positifs a et b, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$.

Propriété – Lecture et conséquences

Ces propriétés transforment une évolution multiplicative en évolution additive et expliquent l'intérêt historique des tables de logarithmes.

Première lecture : situation du chapitre

Propriété – Lecture et conséquences

Un capital est multiplié chaque année par 1,05. Doubler le capital revient à résoudre $1{,}05^n \geq 2$. En prenant le logarithme, $n \ln(1{,}05) \geq \ln 2$. Comme le coefficient est positif, $n \geq \ln 2 / \ln(1{,}05)$. Si n représente des années entières, il faut prendre l'entier supérieur et vérifier le seuil, plutôt que simplement arrondir au plus proche.

Un logarithme composé

Définition – Un logarithme composé

Pour une fonction u dérivable et strictement positive sur l'intervalle étudié, le logarithme composé se dérive en divisant sa dérivée par elle-même. La positivité est une condition d'existence, à traiter avant toute simplification.

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \qquad \ln a = \ln b \Longleftrightarrow a = b \quad (a, b > 0).$$

Une inéquation conserve son sens sous ln, car cette fonction est strictement croissante. Une division ultérieure par un logarithme négatif inverse en revanche le sens de l'inégalité.

Deux exemples résolus

Exemple résolu – Doubler un capital

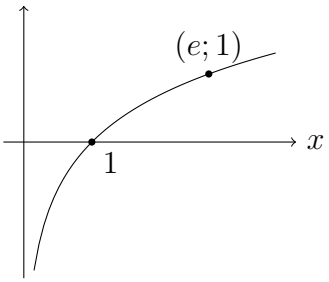
1. Un capital sans versement est multiplié chaque année par 1,05. Après n années, le rapport au capital initial vaut $1{,}05^n$; doubler demande $1{,}05^n \geq 2$.
2. Le logarithme donne $n \ln(1{,}05) \geq \ln 2$, donc $n \geq \ln 2 / \ln(1{,}05) \approx 14{,}21$.
3. Le premier nombre entier d'années est quinze. Quatorze ans ne suffisent pas ; arrondir au plus proche aurait donné une réponse trop petite.

Exemple résolu – Localiser une solution continue

1. Sur $[1; 2]$, posons $f(x) = \ln x + x - 2$. La fonction est continue et sa dérivée $1/x + 1$ est positive.

2. On a $f(1) = -1$ et $f(2) = \ln 2 > 0$: il existe une seule solution dans cet intervalle.
3. Comme $f(1{,}5) = \ln(1{,}5) - 0{,}5 < 0$ et $f(1{,}6) = \ln(1{,}6) - 0{,}4 > 0$, la solution est comprise entre 1,5 et 1,6.

Une représentation pour comprendre



La fonction logarithme : croissance lente et domaine strictement positif.

La courbe du logarithme passe par $(1;0)$ et $(e;1)$; elle monte en restant concave. Son asymptote verticale est l'axe des ordonnées. L'égalité $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ explique pourquoi des multiplications successives deviennent des additions. L'inégalité $\ln x \leq x - 1$ pour $x > 0$ découle de la concavité et de la tangente en un. Elle est globale, tandis qu'écrire $\ln(1+h) \approx h$ décrit une approximation près de zéro.

Confondre ces deux lectures ferait perdre soit le sens de l'inégalité, soit le domaine de validité de l'approximation.

À retenir – Mini-bilan

Toujours imposer des arguments positifs. Le logarithme transforme produits et puissances, mais pas les sommes. Pour les limites indéterminées, utiliser les croissances comparées ; pour les variations, le quotient u'/u.