

Chapitre 03 – Corrections

Dérivation, convexité et optimisation

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Dérivée et variations

$f'(x) = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$. Le signe est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles. f croît sur $] -\infty; -1]$, décroît sur $[-1; 1]$, puis croît. Maximum local $f(-1) = 2$; minimum local $f(1) = -2$.

Exercice 2 – Dérivée et variations

$f'(x) = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2)$. Le signe est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles. f croît sur $] -\infty; -2]$, décroît sur $[-2; 2]$, puis croît. Maximum local $f(-2) = 16$; minimum local $f(2) = -16$.

Exercice 3 – Dérivée et variations

$f'(x) = 3(x^2 - 9) = 3(x - 3)(x + 3)$. Le signe est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles. f croît sur $] -\infty; -3]$, décroît sur $[-3; 3]$, puis croît. Maximum local $f(-3) = 54$; minimum local $f(3) = -54$.

Exercice 4 – Dérivée et variations

$f'(x) = 3(x^2 - 16) = 3(x - 4)(x + 4)$. Le signe est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles. f croît sur $] -\infty; -4]$, décroît sur $[-4; 4]$, puis croît. Maximum local $f(-4) = 128$; minimum local $f(4) = -128$.

Exercice 5 – Dérivée et variations

$f'(x) = 3(x^2 - 25) = 3(x - 5)(x + 5)$. Le signe est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles. f croît sur $] -\infty; -5]$, décroît sur $[-5; 5]$, puis croît. Maximum local $f(-5) = 250$; minimum local $f(5) = -250$.

Exercice 6 – Convexité d'un polynôme

$f''(x) = 6x$. La fonction est concave sur $] -\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$. Le changement de signe en zéro donne le point d'inflexion $I(0; 1)$.

Exercice 7 – Convexité d'un polynôme

$f''(x) = 6x$. La fonction est concave sur $] -\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$. Le changement de signe en zéro donne le point d'inflexion $I(0; 1)$.

Exercice 8 – Convexité d'un polynôme

$f''(x) = 6x$. La fonction est concave sur $] -\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$. Le changement de signe en zéro donne le point d'inflexion $I(0; 1)$.

Exercice 9 – Convexité d'un polynôme

$f''(x) = 6x$. La fonction est concave sur $] -\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$. Le changement de signe en zéro donne le point d'inflexion $I(0; 1)$.

Exercice 10 – Convexité d'un polynôme

$f''(x) = 6x$. La fonction est concave sur $] -\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$. Le changement de signe en zéro donne le point d'inflexion $I(0; 1)$.

Exercice 11 – Tangente et inégalité

L'exponentielle est convexe car sa dérivée seconde est $e^x > 0$; sa courbe est au-dessus de sa tangente en zéro, d'équation $y = 1 + x$. On remplace ensuite x par $1t$.

Exercice 12 – Tangente et inégalité

L'exponentielle est convexe car sa dérivée seconde est $e^x > 0$; sa courbe est au-dessus de sa tangente en zéro, d'équation $y = 1 + x$. On remplace ensuite x par $2t$.

Exercice 13 – Tangente et inégalité

L'exponentielle est convexe car sa dérivée seconde est $e^x > 0$; sa courbe est au-dessus de sa tangente en zéro, d'équation $y = 1 + x$. On remplace ensuite x par $3t$.

Exercice 14 – Tangente et inégalité

L'exponentielle est convexe car sa dérivée seconde est $e^x > 0$; sa courbe est au-dessus de sa tangente en zéro, d'équation $y = 1 + x$. On remplace ensuite x par $4t$.

Exercice 15 – Tangente et inégalité

L'exponentielle est convexe car sa dérivée seconde est $e^x > 0$; sa courbe est au-dessus de sa tangente en zéro, d'équation $y = 1 + x$. On remplace ensuite x par $5t$.

Exercice 16 – Approfondissement — Optimisation sous contrainte

La longueur vaut $6 - x$ et $0 < x < 6$. L'aire est $A(x) = x(6 - x)$; sa dérivée $6 - 2x$ s'annule en $x = 3$. Elle passe du positif au négatif : aire maximale 9 mètres carrés, atteinte pour le carré de côté 3 mètres.

Exercice 17 – Approfondissement — Optimisation sous contrainte

La longueur vaut $8 - x$ et $0 < x < 8$. L'aire est $A(x) = x(8 - x)$; sa dérivée $8 - 2x$ s'annule en $x = 4$. Elle passe du positif au négatif : aire maximale 16 mètres carrés, atteinte pour le carré de côté 4 mètres.

Exercice 18 – Approfondissement — Optimisation sous contrainte

La longueur vaut $10 - x$ et $0 < x < 10$. L'aire est $A(x) = x(10 - x)$; sa dérivée $10 - 2x$ s'annule en $x = 5$. Elle passe du positif au négatif : aire maximale 25 mètres carrés, atteinte pour le carré de côté 5 mètres.

Exercice 19 – Approfondissement — Optimisation sous contrainte

La longueur vaut $12 - x$ et $0 < x < 12$. L'aire est $A(x) = x(12 - x)$; sa dérivée $12 - 2x$ s'annule en $x = 6$. Elle passe du positif au négatif : aire maximale 36 mètres carrés, atteinte pour le carré de côté 6 mètres.

Exercice 20 – Approfondissement — Optimisation sous contrainte

La longueur vaut $14 - x$ et $0 < x < 14$. L'aire est $A(x) = x(14 - x)$; sa dérivée $14 - 2x$ s'annule en $x = 7$. Elle passe du positif au négatif : aire maximale 49 mètres carrés, atteinte pour le carré de côté 7 mètres.