

Chapitre 03 – Cours

Dérivation, convexité et optimisation

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Réinvestir la dérivation pour étudier un modèle
- Interpréter les dérivées première et seconde

Comprendre les notions

Taux de variation et dérivée

Définition – Notion de départ

La dérivée mesure un taux de variation instantané. Un signe positif traduit une croissance, un signe négatif une décroissance sur l'intervalle étudié. L'équation de la tangente en a est $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Un taux moyen sur un intervalle n'est pas une dérivée en un point : les deux répondent à des questions différentes. Les règles du produit et du quotient permettent de traiter des fonctions usuelles.

Propriété – Lecture et conséquences

La composition demande la règle de la chaîne ; en particulier $(e^u)' = u'e^u$ et $(\ln u)' = u'/u$ lorsque u est positive.

Optimiser et interpréter

Propriété – Lecture et conséquences

Un problème de coût, de recette ou de bénéfice commence par définir une fonction et son domaine. Le signe de sa dérivée détermine les candidats à un optimum. Il faut également examiner les bornes du domaine. L'annulation de la dérivée est une condition possible pour un extremum intérieur, mais ne garantit pas à elle seule un maximum. La convexité correspond à une dérivée croissante.

Propriété – Lecture et conséquences

Pour une fonction deux fois dérivable, le signe positif de f'' donne la convexité, et son signe négatif la concavité. Un changement de signe de f'' marque un point d'inflexion : dans un modèle de croissance, la vitesse de croissance peut continuer d'être positive tout en diminuant.

Première lecture : situation du chapitre

Propriété – Lecture et conséquences

La recette $R(x) = 20x - x^2$ sur $[0; 20]$ possède pour dérivée $20 - 2x$. Elle croît jusqu'à dix puis décroît ; sa valeur maximale est cent. Sa dérivée seconde est constante et négative : la fonction est concave. Le graphique illustre le résultat mais le signe de la dérivée fournit sa justification.

Une variation marginale

Définition – Une variation marginale

Dans un modèle de coût C , la dérivée donne le coût marginal : elle estime la variation du coût pour une petite augmentation de production. Elle se distingue du coût moyen $C(x)/x$ lorsque $x > 0$.

$$C(x + h) - C(x) \approx hC'(x) \quad \text{pour } h \text{ petit.}$$

La convexité indique que le coût marginal augmente ; elle n'affirme pas à elle seule que le coût total augmente. Pour distinguer croissance et accélération, il faut examiner respectivement les signes de C' et de C'' .

Deux exemples résolus

Exemple résolu – Optimiser une aire

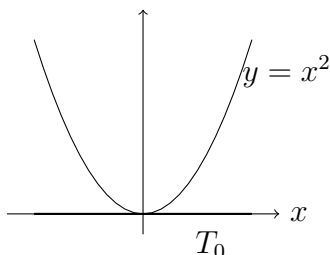
1. Un rectangle de périmètre vingt possède des côtés x et $10 - x$, avec $0 < x < 10$. Son aire est $A(x) = 10x - x^2$.

2. La dérivée $A'(x) = 10 - 2x$ est positive avant cinq, nulle en cinq et négative ensuite. L'aire atteint donc son maximum pour $x = 5$.
3. Le rectangle optimal est un carré de côté cinq et d'aire vingt-cinq. La dérivée seconde -2 confirme la concavité sur tout le domaine.

Exemple résolu – Étudier un changement de convexité

1. Pour $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$. La dérivée seconde est négative à gauche de zéro et positive à droite.
2. L'origine est donc un point d'inflexion. La tangente y a pour équation $y = 0$; la courbe la traverse, car x^3 change de signe.
3. Cependant zéro n'est pas un extremum : f' reste positive de part et d'autre. Une pente momentanément nulle n'est pas synonyme de sommet.

Une représentation pour comprendre



La parabole convexe est au-dessus de sa tangente en zéro.

La parabole et sa tangente au sommet rendent visible la distinction entre pente et courbure. Au sommet, la pente s'annule ; autour, le signe de la dérivée change. Pour une parabole convexe, la tangente reste sous la courbe sur tout le domaine. Dans une composition, la dérivée de la fonction intérieure ne doit jamais disparaître. Ainsi $f(x) = e^{-x^2}$ donne $f'(x) = -2xe^{-x^2}$: l'exponentielle est toujours positive, donc le signe dépend uniquement de $-x$.

Cet exemple montre l'intérêt de factoriser avant de construire le tableau de variations.

À retenir – Mini-bilan

La première dérivée commande les variations ; la seconde commande la convexité. Justifier les changements de signe. Pour optimiser une grandeur, inclure les contraintes du problème et comparer les valeurs aux bornes autorisées.