

Chapitre 04 – Corrections

Primitives, équations différentielles et intégrales

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Calcul direct

Une primitive est $x^2 + x$. L'intégrale vaut 2 ; la valeur moyenne vaut $2/1 = 2$.

Exercice 2 – Calcul direct

Une primitive est $x^2 + x$. L'intégrale vaut 6 ; la valeur moyenne vaut $6/2 = 3$.

Exercice 3 – Calcul direct

Une primitive est $x^2 + x$. L'intégrale vaut 12 ; la valeur moyenne vaut $12/3 = 4$.

Exercice 4 – Calcul direct

Une primitive est $x^2 + x$. L'intégrale vaut 20 ; la valeur moyenne vaut $20/4 = 5$.

Exercice 5 – Calcul direct

Une primitive est $x^2 + x$. L'intégrale vaut 30 ; la valeur moyenne vaut $30/5 = 6$.

Exercice 6 – Reconnaître une dérivée

Une primitive est e^{1x} . L'intégrale vaut $\boxed{e^1 - 1}$.

Exercice 7 – Reconnaître une dérivée

Une primitive est e^{2x} . L'intégrale vaut $\boxed{e^2 - 1}$.

Exercice 8 – Reconnaître une dérivée

Une primitive est e^{3x} . L'intégrale vaut $\boxed{e^3 - 1}$.

Exercice 9 – Reconnaître une dérivée

Une primitive est e^{4x} . L'intégrale vaut $\boxed{e^4 - 1}$.

Exercice 10 – Reconnaître une dérivée

Une primitive est e^{5x} . L'intégrale vaut $\boxed{e^5 - 1}$.

Exercice 11 – Vérifier une primitive avant intégration

Par la règle du produit, $F'(x) = e^{1x}/1 + xe^{1x} - e^{1x}/1 = xe^{1x}$. L'intégrale est $F(1) - F(0) = e^1/1 - (e^1 - 1)/1$. Une primitive a été fournie : aucune intégration par parties n'est nécessaire.

Exercice 12 – Vérifier une primitive avant intégration

Par la règle du produit, $F'(x) = e^{2x}/2 + xe^{2x} - e^{2x}/2 = xe^{2x}$. L'intégrale est $F(1) - F(0) = e^2/2 - (e^2 - 1)/4$. Une primitive a été fournie : aucune intégration par parties n'est nécessaire.

Exercice 13 – Vérifier une primitive avant intégration

Par la règle du produit, $F'(x) = e^{3x}/3 + xe^{3x} - e^{3x}/3 = xe^{3x}$. L'intégrale est $F(1) - F(0) = e^3/3 - (e^3 - 1)/9$. Une primitive a été fournie : aucune intégration par parties n'est nécessaire.

Exercice 14 – Vérifier une primitive avant intégration

Par la règle du produit, $F'(x) = e^{4x}/4 + xe^{4x} - e^{4x}/4 = xe^{4x}$. L'intégrale est $F(1) - F(0) = e^4/4 - (e^4 - 1)/16$. Une primitive a été fournie : aucune intégration par parties n'est nécessaire.

Exercice 15 – Vérifier une primitive avant intégration

Par la règle du produit, $F'(x) = e^{5x}/5 + xe^{5x} - e^{5x}/5 = xe^{5x}$. L'intégrale est $F(1) - F(0) = e^5/5 - (e^5 - 1)/25$. Une primitive a été fournie : aucune intégration par parties n'est nécessaire.

Exercice 16 – Approfondissement — Aire entre deux courbes

Puisque $x(1 - x) \geq 0$ sur $[0; 1]$, la droite est au-dessus de la parabole. L'aire vaut $\int_0^1 1(x - x^2)dx = 1(1/2 - 1/3) = \boxed{\frac{1}{6}}$ unité d'aire.

Exercice 17 – Approfondissement — Aire entre deux courbes

Puisque $x(1 - x) \geq 0$ sur $[0; 1]$, la droite est au-dessus de la parabole. L'aire vaut $\int_0^1 2(x - x^2)dx = 2(1/2 - 1/3) = \boxed{\frac{1}{3}}$ unité d'aire.

Exercice 18 – Approfondissement — Aire entre deux courbes

Puisque $x(1 - x) \geq 0$ sur $[0; 1]$, la droite est au-dessus de la parabole. L'aire vaut $\int_0^1 3(x - x^2)dx = 3(1/2 - 1/3) = \boxed{\frac{1}{2}}$ unité d'aire.

Exercice 19 – Approfondissement — Aire entre deux courbes

Puisque $x(1 - x) \geq 0$ sur $[0; 1]$, la droite est au-dessus de la parabole. L'aire vaut $\int_0^1 4(x - x^2)dx = 4(1/2 - 1/3) = \boxed{\frac{2}{3}}$ unité d'aire.

Exercice 20 – Approfondissement — Aire entre deux courbes

Puisque $x(1-x) \geq 0$ sur $[0; 1]$, la droite est au-dessus de la parabole. L'aire vaut $\int_0^1 5(x-x^2)dx = 5(1/2 - 1/3) = \boxed{\frac{5}{6}}$ unité d'aire.