Chapitre 04 – Cours

Primitives, équations différentielles et intégrales

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Calculer une aire et une valeur moyenne
- Résoudre un modèle différentiel simple

Comprendre les notions

Primitives et équations différentielles

Définition – Notion de départ

Une primitive F d'une fonction f sur un intervalle est définie par F'=f. Si f est continue, elle possède des primitives qui diffèrent d'une constante. Le calcul s'appuie sur la lecture inverse du tableau des dérivées. Une condition comme F(0)=2 sert à choisir une primitive particulière. Les équations différentielles donnent des modèles d'évolution continue. Pour $y' = ay + b$, avec a non nul, les solutions sont $y = -b/a + Ce^{ax}$. Pour a nul, on retrouve les fonctions affines. Une condition initiale détermine C.

Propriété – Lecture et conséquences

La substitution dans l'équation et la vérification de la condition initiale contrôlent le résultat.

Intégrale et aire

Propriété – Lecture et conséquences

Pour une fonction continue, l'intégrale entre a et b se calcule par $F(b) - F(a)$. Lorsque la fonction est positive et a inférieur à b, elle représente une aire. Sinon, il s'agit d'une aire algébrique : les contributions négatives sont soustraites. L'aire géométrique entre deux courbes demande de justifier laquelle est supérieure et de partager l'intervalle si elles se croisent. L'intégrale est linéaire et respecte l'ordre.

Propriété – Lecture et conséquences

La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$, et non simplement la moyenne de ses deux valeurs aux extrémités.

Première lecture : situation du chapitre

Propriété – Lecture et conséquences

Pour $f(x) = 2x+1$ sur $[0;3]$, une primitive est x^2+x. L'intégrale vaut douze et la valeur moyenne quatre. Dans un problème de répartition de richesses, une aire sous une courbe cumulative peut résumer une inégalité ; il faut alors interpréter les axes, les proportions et l'unité choisie avant de donner un sens au nombre obtenu.

Accumuler et moyenner

Définition – Accumuler et moyenner

Une intégrale cumule les valeurs d'une grandeur sur un intervalle. Si un débit est exprimé en litres par minute, son intégrale sur une durée en minutes représente un volume en litres.

$$v_{\text{moy}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b v(t)\,dt \qquad (a<b).$$

La valeur moyenne possède la même unité que la fonction de départ. Elle n'est généralement pas la moyenne des valeurs aux extrémités : cette égalité particulière vaut notamment pour une évolution affine, mais pas pour une courbe quelconque.

Deux exemples résolus

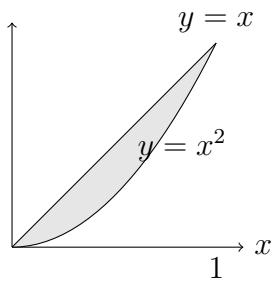
Exemple résolu – Un débit variable

1. Un débit vaut $d(t) = 2t+1$ litres par minute pour $0 \leq t \leq 3$. Il est positif ; son intégrale calcule donc le volume écoulé.
2. Une primitive est $D(t) = t^2 + t$. Le volume vaut $D(3) - D(0) = 12$ litres.
3. Le débit moyen sur les trois minutes est $12/3 = 4$ litres par minute. On contrôle les unités : un volume divisé par un temps donne bien un débit.

Exemple résolu – Un modèle différentiel stabilisé

1. Une quantité satisfait $y' = -2y + 6$ et $y(0) = 1$. L'équilibre constant vaut trois, et la famille de solutions est $y(t) = 3 + Ce^{-2t}$.
2. La condition initiale donne $C = -2$. Ainsi $y(t) = 3 - 2e^{-2t}$ et $y'(t) = 4e^{-2t}$.
3. La substitution fournit $-2y + 6 = 4e^{-2t}$, identique à la dérivée. Pour $t \geq 0$, la quantité augmente de un vers trois : c'est une stabilisation par valeurs inférieures.

Une représentation pour comprendre



Axes gradués à la même échelle : le point de coordonnées (1;1) est dessiné en (3;3).

Le dessin montre la région entre la droite et la parabole sur $[0; 1]$. Leurs intersections sont les bornes ; à l'intérieur, $x - x^2 = x(1 - x)$ est positif. L'ordre des courbes est donc établi algébriquement avant d'utiliser l'aire grisée. Une valeur moyenne a la même unité que f. Pour un débit exprimé en litres par minute, intégrer sur un temps en minutes donne un volume en litres ; diviser ensuite par la durée donne de nouveau un débit.

Cette interprétation distingue une quantité cumulée de son rythme moyen et aide à choisir la formule adaptée.

À retenir – Mini-bilan

Primitive : différence aux bornes. Aire : ordre des courbes et découpage. Valeur moyenne : intégrale divisée par la longueur de l'intervalle. Par parties : choisir un produit dont une dérivation simplifie le calcul.