

Chapitre 05 – Cours

Probabilités conditionnelles et inférence bayésienne

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Lire un tableau ou un arbre pondéré
- Distinguer les deux sens d'un conditionnement

Comprendre les notions

Changer de population de référence

Définition – Notion de départ

La probabilité de B sachant A est $P_A(B) = P(A \cap B)/P(A)$ lorsque $P(A)$ est non nulle. Dans une population finie tirée uniformément, on se restreint aux individus de A avant de mesurer la part appartenant à B. Les probabilités $P_A(B)$ et $P_B(A)$ ne répondent donc pas à la même question.

Arbres et probabilités totales

Propriété – Lecture et conséquences

Dans un arbre pondéré, les probabilités issues d'un même nœud ont pour somme un. La probabilité d'un chemin est le produit de ses branches ; des chemins incompatibles menant à un même événement sont additionnés. Si A et son contraire forment une partition,

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B).$$

La formule de Bayes n'est ensuite qu'un quotient : $P_B(A) = P(A)P_A(B)/P(B)$, à condition que $P(B)$ soit non nulle.

Première lecture : application et esprit critique

Propriété – Lecture et conséquences

Supposons une maladie présente chez un pour cent des personnes, un test positif chez quatre-vingt-dix pour cent des malades et chez cinq pour cent des non-malades. La probabilité totale d'un test positif vaut $0,01 \times 0,9 + 0,99 \times 0,05 = 0,0585$. Parmi les positifs, la proportion de malades vaut $0,009/0,0585 = 2/13$. La sensibilité élevée du test n'est donc pas la probabilité d'être malade après un résultat positif. Cette différence illustre l'effet du taux de base et évite une inversion fréquente des conditionnements.

Propriété – Lecture et conséquences

Dans une situation réelle, les nombres sont des caractéristiques d'un modèle dont la pertinence et la population d'application doivent aussi être discutées.

Indépendance et taux de base

Définition – Indépendance et taux de base

Deux événements A et B sont indépendants lorsque leur intersection possède la probabilité produit. Si $P(A) > 0$, cela équivaut à dire que connaître A ne modifie pas la probabilité de B.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad P_A(B) = P(B).$$

Des événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont pas indépendants : leur intersection est vide. Le taux de base est la proportion initiale de A dans la population ; il intervient dans le calcul inverse même lorsqu'un test est très sensible.

Deux exemples résolus

Exemple résolu – Deux ateliers et des défauts

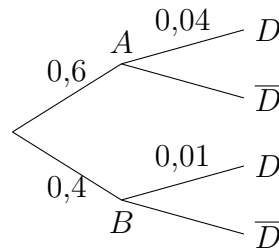
1. Un atelier A fournit soixante pour cent des pièces ; quatre pour cent y sont défectueuses. L'autre atelier B fournit le reste avec un taux de défaut de un pour cent.
2. La probabilité d'un défaut D vaut $P(D) = 0,6 \times 0,04 + 0,4 \times 0,01 = 0,028$.

3. Parmi les pièces défectueuses, la part venant de A vaut $P_D(A) = 0,024/0,028 = 6/7$. Ce résultat diffère du taux de défaut de A et de sa part dans la production.

Exemple résolu – Lire un tableau d'effectifs

1. Parmi deux cents personnes, quatre-vingts pratiquent le vélo, cinquante la natation et trente les deux. Un individu est tiré uniformément.
2. La probabilité de nager sachant que l'on fait du vélo vaut $30/80 = 3/8$. La probabilité de faire du vélo sachant que l'on nage vaut $30/50 = 3/5$.
3. Le dénominateur change car la population de référence change. Les événements ne sont pas indépendants : $P(V \cap N) = 0,15$ diffère de $0,4 \times 0,25 = 0,10$.

Une représentation pour comprendre



Les branches non étiquetées portent les probabilités complémentaires 0,96 et 0,99.

L'arbre représente le modèle des deux ateliers. Chaque chemin complet correspond à une intersection ; les deux chemins aboutissant à D s'additionnent. Pour remonter vers l'origine d'une pièce déjà déclarée défectueuse, on divise un chemin favorable par la somme de tous les chemins compatibles avec cette observation. Un conditionnement doit toujours être nommé dans une phrase. « Parmi les pièces de A » et « parmi les pièces défectueuses » sélectionnent des ensembles différents.

Dans un tableau, la somme d'une ligne ou d'une colonne fournit le bon dénominateur ; utiliser systématiquement l'effectif total donnerait une probabilité simple, pas une probabilité conditionnelle.

À retenir – Mini-bilan

Le long d'un chemin : multiplier. Pour plusieurs chemins incompatibles : additionner. Pour une information déjà connue : restreindre la population puis diviser. Le sens du conditionnement et le taux de base déterminent l'interprétation.