

Chapitre 06 – Cours

Lois discrètes : uniforme, Bernoulli, binomiale et géométrique

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Choisir une loi suivant la question posée
- Calculer probabilités et espérances

Comprendre les notions

Compter ou attendre

Définition – Notion de départ

Une variable discrète prend un ensemble de valeurs isolées. Une loi uniforme sur les entiers de un à n attribue la même probabilité $1/n$ à chaque valeur ; son espérance est $(n+1)/2$. Une Bernoulli code le succès par un et l'échec par zéro, avec espérance p et variance $p(1-p)$. Le nombre de succès dans n épreuves identiques et indépendantes suit une binomiale : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, avec espérance np et écart-type $\sqrt{np(1-p)}$.

Propriété – Lecture et conséquences

Le coefficient binomial se calcule par sa définition ou le triangle de Pascal.

La loi géométrique

Propriété – Lecture et conséquences

Le rang du premier succès dans une répétition indépendante de probabilité de succès p suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$. Pour $0 < p < 1$, $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$ et $P(X > k) = (1-p)^k$. Son espérance est $1/p$. Le décalage d'un exposant entre « premier succès au rang k » et « aucun succès pendant k essais » doit être surveillé. La propriété d'absence de mémoire exprime que, sachant les premiers essais échoués, l'attente supplémentaire possède la même loi.

Propriété – Lecture et conséquences

Elle vient de l'indépendance des épreuves, non d'une promesse qu'un succès devient plus probable après une longue attente.

Première lecture : application

Propriété – Lecture et conséquences

Avec une probabilité de succès un quart, la probabilité de réussir pour la première fois au troisième essai est $(3/4)^2(1/4) = 9/64$. Le nombre moyen d'essais est quatre. Ce même contexte peut conduire à une binomiale si l'on fixe d'abord le nombre d'essais et compte les succès : la variable demandée détermine donc la loi.

Choisir ce que compte X

Définition – Choisir ce que compte X

Une loi décrit une variable définie avant le calcul. Un nombre de succès parmi un nombre fixé d'essais et un rang de premier succès sont deux variables différentes, même si les expériences élémentaires sont identiques.

$$X \sim \mathcal{B}(n; p) \Rightarrow X \in \{0, \dots, n\}, \quad T \sim \mathcal{G}(p) \Rightarrow T \in \mathbb{N}^*.$$

Pour le rang d'attente, l'essai réussi est inclus dans le décompte. Si l'on comptait seulement les échecs précédant le succès, les valeurs commenceraient à zéro et les formules seraient décalées.

Deux exemples résolus

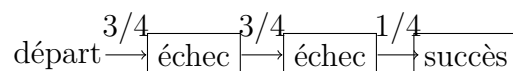
Exemple résolu – Un nombre de succès fixé

1. On effectue quatre essais indépendants de probabilité de succès $1/4$. X compte les succès : $X \sim \mathcal{B}(4; 1/4)$.
 2. La probabilité de deux succès vaut $\binom{4}{2}(1/4)^2(3/4)^2 = 54/256 = 27/128$.
 3. Son espérance vaut $4 \times 1/4 = 1$, et sa variance $4 \times 1/4 \times 3/4 = 3/4$. Les quatre essais sont réalisés, quel que soit le rang du premier succès.
-

Exemple résolu – Un temps d'attente discret

1. Les mêmes essais sont répétés jusqu'au premier succès. Le rang T suit la loi géométrique de paramètre $1/4$.
 2. Réussir pour la première fois au troisième essai impose deux échecs puis un succès : $P(T = 3) = (3/4)^2(1/4) = 9/64$.
 3. Attendre plus de trois essais impose trois échecs : $P(T > 3) = (3/4)^3 = 27/64$.
L'espérance vaut quatre essais ; cette moyenne n'est pas une date certaine de réussite.
-

Une représentation pour comprendre



Un seul chemin donne le premier succès au troisième essai.

Le chemin dessiné correspond à une première réussite au troisième essai. Il n'y a pas de coefficient binomial : la place du succès est déjà imposée, à la fin. Dans un décompte binomial, on compterait toutes les places possibles des succès parmi un nombre fixé d'essais. Pour une uniforme sur les entiers de un à n , les valeurs ont toutes la même probabilité ; cette hypothèse doit venir du contexte.

Un dé équilibré donne une espérance 3,5 sans jamais afficher cette valeur. Ce fait rappelle que l'espérance est une moyenne théorique de répétitions, non une issue nécessairement possible.

À retenir – Mini-bilan

Uniforme : issues équiprobables. Bernoulli : indicatrice d'un succès. Binomiale : nombre de succès dans n essais. Géométrique : rang du premier succès. Définir la variable et vérifier l'indépendance avant de choisir la loi.
