Chapitre 07 – Cours

Lois à densité : uniforme et exponentielle

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Calculer une probabilité par intégration
- Étudier des temps d'attente continus

Comprendre les notions

Densité et répartition

Définition – Notion de départ

Une densité est une fonction positive dont l'intégrale sur son domaine vaut un. Pour une variable X de densité f, $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$. La probabilité d'une valeur isolée est nulle, mais cela ne signifie pas qu'aucune valeur ne peut être observée : une mesure est toujours donnée avec une précision finie. La fonction de répartition est $F(x) = P(X \leq x)$. L'espérance s'écrit $\int x f(x)\,dx$ lorsque l'intégrale existe ; la variance est $E(X^2) - E(X)^2$.

Propriété – Lecture et conséquences

Une densité peut dépasser un sur un petit intervalle : c'est son intégrale totale, et non sa hauteur, qui doit valoir un.

Deux modèles

Propriété – Lecture et conséquences

Pour une uniforme sur $[a; b]$, avec a inférieur à b, la densité vaut $1/(b-a)$ sur l'intervalle. La moyenne est $(a+b)/2$ et la variance $(b-a)^2/12$. La probabilité d'un sous-intervalle est proportionnelle à sa longueur. Pour une exponentielle de taux $\lambda > 0$, la densité est $\lambda e^{-\lambda x}$ pour x positif ou nul, et zéro pour x négatif. Sa fonction de répartition vaut $1 - e^{-\lambda x}$ sur les positifs ; son espérance est $1/\lambda$.

Première lecture : application et mémoire

Propriété – Lecture et conséquences

Une attente exponentielle de taux un demi dépasse trois unités avec probabilité $e^{-3/2}$. La relation $P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$ exprime l'absence de mémoire et se déduit du quotient des fonctions de survie. C'est une hypothèse de modèle à discuter : toutes les durées réelles ne possèdent pas cette propriété.

Survie et absence de mémoire

Définition – Survie et absence de mémoire

La fonction de survie donne la probabilité de dépasser une durée. Pour une loi exponentielle, elle décroît géométriquement avec le temps continu.

$$S(t) = P(X > t) = e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0).$$

Pour $s, t \geq 0$, le quotient $S(s+t)/S(s)$ vaut $S(t)$: c'est l'absence de mémoire. L'attente déjà écoulée ne modifie pas la loi de l'attente restante dans ce modèle précis ; ce n'est pas une propriété de toutes les durées.

Deux exemples résolus

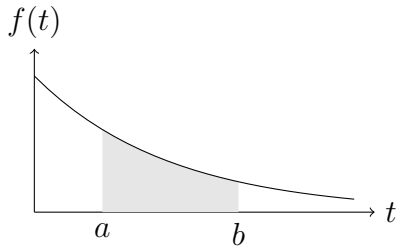
Exemple résolu – Une arrivée uniforme

1. Une arrivée est uniforme entre zéro et dix minutes. La densité vaut $1/10$ sur cet intervalle et zéro ailleurs.
2. La probabilité d'arriver entre deux et cinq minutes est l'aire du rectangle : $(5-2)/10 = 0{,}3$.
3. Le temps moyen d'arrivée est cinq minutes. La probabilité d'arriver exactement à cinq minutes est nulle ; la probabilité de tout intervalle de longueur positive à l'intérieur du domaine est positive.

Exemple résolu – Une attente exponentielle

1. Une attente X suit une loi exponentielle de taux $\lambda = 0{,}5$ par minute. Son espérance vaut deux minutes.
2. La probabilité de dépasser trois minutes vaut $e^{-1,5}$. Celle d'attendre entre une et trois minutes vaut $e^{-0,5} - e^{-1,5}$.
3. Sachant que trois minutes sont déjà écoulées, dépasser encore deux minutes a pour probabilité $e^{-2,5}/e^{-1,5} = e^{-1}$. C'est la même probabilité que dépasser deux minutes au départ.

Une représentation pour comprendre



La probabilité de l'intervalle est l'aire grisée, avec une échelle verticale adaptée.

La zone grisée sous la densité représente une probabilité d'intervalle. La hauteur seule n'est pas une probabilité et peut dépasser un pour d'autres densités. Une borne isolée n'ajoute aucune aire : pour une loi à densité, les probabilités avec bornes strictes ou larges sont donc identiques. Le taux exponentiel porte l'inverse de l'unité de temps. Passer des minutes aux secondes modifie sa valeur numérique : un taux de 0,5 par minute correspond à 1/120 par seconde.

L'espérance se transforme de deux minutes à cent vingt secondes, décrivant exactement la même attente.

À retenir – Mini-bilan

Une probabilité continue est une aire. Uniforme : rapport de longueurs. Exponentielle : utiliser la survie et les différences de survies. Vérifier le domaine, le taux positif et les unités de temps.