

Chapitre 04 – Exercices

Graphes, matrices et chaînes de Markov

20 exercices progressifs

Exercice 1 – Produit matriciel

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 , conjecturer et prouver A^m pour m naturel.

Exercice 2 – Produit matriciel

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 , conjecturer et prouver A^m pour m naturel.

Exercice 3 – Produit matriciel

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 , conjecturer et prouver A^m pour m naturel.

Exercice 4 – Produit matriciel

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 , conjecturer et prouver A^m pour m naturel.

Exercice 5 – Produit matriciel

$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 , conjecturer et prouver A^m pour m naturel.

Exercice 6 – Graphe et chemins

Un graphe orienté possède la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Décrire les arcs, calculer A^2 et donner le nombre de chemins de longueur deux du sommet 1 au sommet 2. Que représente $(A^3)_{1,2}$?

Exercice 7 – Graphe et chemins

Un graphe orienté possède la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Décrire les arcs, calculer A^2 et donner le nombre de chemins de longueur deux du sommet 1 au sommet 2. Que représente $(A^4)_{1,2}$?

Exercice 8 – Graphe et chemins

Un graphe orienté possède la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Décrire les arcs, calculer A^2 et donner le nombre de chemins de longueur deux du sommet 1 au sommet 2. Que représente $(A^5)_{1,2}$?

Exercice 9 – Graphe et chemins

Un graphe orienté possède la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Décrire les arcs, calculer A^2 et donner le nombre de chemins de longueur deux du sommet 1 au sommet 2. Que représente $(A^6)_{1,2}$?

Exercice 10 – Graphe et chemins

Un graphe orienté possède la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Décrire les arcs, calculer A^2 et donner le nombre de chemins de longueur deux du sommet 1 au sommet 2. Que représente $(A^7)_{1,2}$?

Exercice 11 – Chaîne de Markov à deux états

La transition, pour des vecteurs-lignes, est $P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$. Si $p_0 = 1$, établir une récurrence pour la probabilité p_m du premier état, calculer p_1 et sa limite.

Exercice 12 – Chaîne de Markov à deux états

La transition, pour des vecteurs-lignes, est $P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$. Si $p_0 = 1$, établir une récurrence pour la probabilité p_m du premier état, calculer p_2 et sa limite.

Exercice 13 – Chaîne de Markov à deux états

La transition, pour des vecteurs-lignes, est $P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$. Si $p_0 = 1$, établir une récurrence pour la probabilité p_m du premier état, calculer p_3 et sa limite.

Exercice 14 – Chaîne de Markov à deux états

La transition, pour des vecteurs-lignes, est $P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$. Si $p_0 = 1$, établir une récurrence pour la probabilité p_m du premier état, calculer p_4 et sa limite.

Exercice 15 – Chaîne de Markov à deux états

La transition, pour des vecteurs-lignes, est $P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$. Si $p_0 = 1$, établir une récurrence pour la probabilité p_m du premier état, calculer p_5 et sa limite.

Exercice 16 – Approfondissement — Inverse et système

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer son inverse en vérifiant le produit, puis résoudre $AX = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 17 – Approfondissement — Inverse et système

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer son inverse en vérifiant le produit, puis résoudre $AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 18 – Approfondissement — Inverse et système

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer son inverse en vérifiant le produit, puis résoudre $AX = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 19 – Approfondissement — Inverse et système

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer son inverse en vérifiant le produit, puis résoudre $AX = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 20 – Approfondissement — Inverse et système

$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. Déterminer son inverse en vérifiant le produit, puis résoudre $AX = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$.