

Chapitre 01 – Cours

Combinatoire et dénombrement

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Choisir entre ordre et absence d'ordre
- Utiliser principes additif, multiplicatif et coefficients binomiaux

Comprendre les notions

Ensembles finis et choix successifs

Définition – Notion de départ

Le cardinal $\text{Card}(A)$ est le nombre d'éléments d'un ensemble fini. Si A et B sont disjoints, le cardinal de leur réunion est la somme de leurs cardinaux. Pour des choix successifs indépendants au sens du dénombrement, on multiplie les nombres de possibilités. Ainsi, trois lettres choisies parmi quatre symboles donnent $4^3 = 64$ mots lorsque les répétitions sont autorisées. Un k -uplet est ordonné : changer l'ordre peut changer l'objet. Sans répétition, choisir successivement k éléments parmi n donne $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ possibilités.

Propriété – Lecture et conséquences

Pour $k = n$, on obtient $n!$, avec $0! = 1$.

Combinaisons

Propriété – Lecture et conséquences

Un groupe de k éléments sans ordre est une partie de cardinal k . Son nombre est

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

La symétrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ correspond au choix des éléments retenus ou exclus. La relation de Pascal $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ se démontre en distinguant la présence d'un élément fixé. Enfin $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ compte toutes les parties.

Première lecture : situation du chapitre

Propriété – Lecture et conséquences

Dans un groupe de six personnes, un binôme sans rôle peut être choisi de $\binom{6}{2} = 15$ façons. Un président et un secrétaire donnent au contraire $6 \times 5 = 30$ choix. Le facteur deux vient des deux ordres possibles d'une même paire. Dessiner un arbre ou faire un petit tableau aide à décider si les répétitions et l'ordre interviennent.

Compter une seule fois

Définition – Compter une seule fois

Une permutation est une liste ordonnée contenant exactement une fois chacun des éléments disponibles. Une combinaison est au contraire un sous-ensemble : ses éléments ne portent aucune place. On peut passer des listes aux groupes en divisant par le nombre d'ordres possibles dans chaque groupe, mais seulement si ce nombre est le même pour tous les groupes.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad A_n^k = k! \binom{n}{k}.$$

Un arrangement ne permet pas les répétitions.

Propriété – Compter une seule fois

Une liste avec répétitions relève du produit cartésien et compte n^k possibilités.

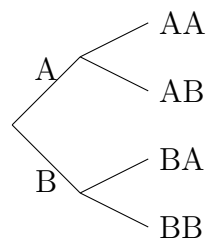
Deux exemples résolus

Exemple résolu – Un code sans répétition

1. Un code comporte trois chiffres distincts choisis parmi 0, 1, 2, 3, 4. Le zéro est autorisé en première position : il s'agit d'un code, pas d'un entier à trois chiffres.
 2. Il reste successivement cinq, quatre puis trois possibilités. Le principe multiplicatif donne $5 \times 4 \times 3 = 60$ codes.
 3. Si les répétitions deviennent autorisées, chaque position offre cinq choix : on obtient $5^3 = 125$ codes.
-

Exemple résolu – Une équipe contenant une personne imposée

1. On choisit quatre élèves parmi neuf ; Léa doit être retenue. Sa place étant acquise, il reste trois personnes à choisir parmi huit.
 2. Le groupe ne comporte aucun rôle : son nombre vaut $\binom{8}{3} = 56$. Multiplier par quatre compterait artificiellement quatre places pour Léa.
 3. Si Léa est exclue, on obtient $\binom{8}{4} = 70$ groupes. Le total $56 + 70 = 126 = \binom{9}{4}$ illustre Pascal.
-

Une représentation pour comprendre


Deux places ordonnées, deux choix à chaque étape.

L'arbre représente les mots de longueur deux sur deux lettres. Chaque embranchement correspond à une place, chaque feuille à un mot ; les mots AB et BA restent différents. Pour un groupe de deux personnes, ces deux ordres décriraient au contraire le même résultat. Un dénombrement par complémentaire convient lorsque la contrainte opposée est plus simple. Parmi les 2^n parties d'un ensemble, une seule est vide : il existe donc $2^n - 1$ parties non vides.

Il faut préciser l'ensemble total avant de retrancher des objets exclus.

À retenir – Mini-bilan

Identifier les objets, décider si l'ordre compte et si une répétition est permise. Additionner les cas incompatibles ; multiplier les étapes ; utiliser les coefficients binomiaux pour les groupes sans rôle.
