Chapitre 04 – Cours

Représentations paramétriques et équations de plans

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Traduire une configuration par des équations
- Résoudre et interpréter les intersections

Comprendre les notions

Décrire une droite

Définition – Notion de départ

La droite passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ de direction non nulle $u = (a; b; c)$ admet la représentation $x = x_A + at$, $y = y_A + bt$, $z = z_A + ct$, avec $t \in \mathbb{R}$. Pour tester un point, il faut trouver un même paramètre qui vérifie les trois coordonnées. Trois paramètres différents ne prouvent aucune appartenance.

Décrire un plan

Propriété – Lecture et conséquences

Dans un repère orthonormé, un plan normal à $(a; b; c) \neq 0$ possède une équation $ax + by + cz + d = 0$. Le terme constant se détermine en remplaçant les coordonnées d'un point connu. Deux équations proportionnelles décrivent le même plan. Une équation cartésienne de plan n'est pas une représentation paramétrique de droite.

Intersections

Propriété – Lecture et conséquences

Pour une droite et un plan, substituer les coordonnées paramétriques dans l'équation du plan. Une équation du premier degré en t donne une intersection unique ; une contradiction signifie aucune intersection ; une identité signifie que la droite est contenue dans le plan. Pour deux droites, utiliser deux paramètres indépendants et résoudre les trois égalités de coordonnées.

Première lecture : situation du chapitre

Propriété – Lecture et conséquences

La droite $(x;y;z) = (0;0;1) + t(1;2;1)$ rencontre $x+y+z=9$ quand $4t+1=9$. On obtient $t=2$ et le point $(2;4;3)$. La somme des coordonnées vaut bien neuf. Le résultat est un point, et non seulement la valeur du paramètre : c'est l'interprétation géométrique qui termine la résolution.

Positions relatives

Définition – Positions relatives

Deux plans dont les vecteurs normaux ne sont pas colinéaires se coupent suivant une droite. Des normaux colinéaires donnent des plans parallèles, éventuellement confondus. Deux droites non parallèles de l'espace peuvent être sécantes ou non coplanaires : l'absence de parallélisme ne garantit pas une intersection.

$$a(x_A + tu_x) + b(y_A + tu_y) + c(z_A + tu_z) + d = 0.$$

Cette substitution donne un test complet d'intersection entre une droite et un plan. Le coefficient de t est le produit scalaire du normal et du directeur.

Deux exemples résolus

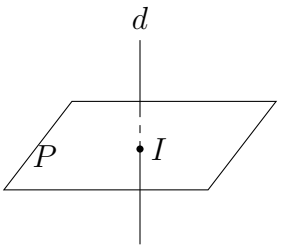
Exemple résolu – Une droite parallèle à un plan

1. Soit $d : (x;y;z) = (1;0;0) + t(1;-1;0)$ et $P : x+y+z=3$. Le normal $(1;1;1)$ est orthogonal au directeur de d.
2. En remplaçant dans le plan, on obtient $1+t-t=3$, soit $1=3$. Cette contradiction signifie que d ne rencontre pas P.
3. La même droite est contenue dans $Q : x+y+z=1$, car la substitution donne l'identité $1=1$ pour tout paramètre.

Exemple résolu – L'intersection de deux plans

1. Considérons $P : x + y + z = 2$ et $Q : x - y = 0$. La seconde équation impose $y = x$; posons $x = t$.
2. La première donne $z = 2 - 2t$. L'intersection est donc la droite $(x; y; z) = (0; 0; 2) + t(1; 1; -2)$.
3. Les normaux $(1; 1; 1)$ et $(1; -1; 0)$ ne sont pas colinéaires. Le directeur trouvé leur est orthogonal à tous deux, ce qui confirme le résultat.

Une représentation pour comprendre



Une droite sécante au plan : un seul paramètre convient.

Dans le schéma, la droite traverse le plan au point I. Un paramètre décrit tous les points de la droite : la substitution sélectionne celui qui appartient aussi au plan. Il ne s'agit pas d'un dessin à l'échelle ; le résultat d'intersection vient des équations. Lorsqu'on compare deux droites, réserver un paramètre différent à chacune.

Un système sans solution prouve qu'elles ne se rencontrent pas ; il faut alors examiner leurs directions pour distinguer parallélisme et droites non coplanaires. Une solution pour deux coordonnées doit toujours être contrôlée dans la troisième, faute de quoi une intersection apparente peut être fausse.

À retenir – Mini-bilan

Une représentation paramétrique produit des points ; une équation cartésienne impose une condition. Leur substitution révèle une intersection unique, aucune intersection ou une inclusion. Traduire la solution algébrique en objet géométrique.