Chapitre 05 – Cours

Récurrence et convergence des suites

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Prouver une propriété par récurrence
- Déterminer des limites et justifier une convergence

Comprendre les notions

Démontrer par récurrence

Définition – Notion de départ

Pour prouver une propriété au rang entier n, commencer par vérifier le premier rang. Supposer ensuite la propriété vraie à un rang arbitraire autorisé, puis en déduire sa validité au rang suivant. L'initialisation et l'hérédité sont toutes deux indispensables. Une vérification des premiers termes ne remplace pas cette démonstration.

Limites et convergence

Propriété – Lecture et conséquences

Dire que u_n tend vers un réel L signifie que tous les termes assez lointains sont aussi proches que voulu de L. Les opérations usuelles sur les limites nécessitent des précautions : une forme indéterminée doit être transformée. Les théorèmes de comparaison et des gendarmes permettent des conclusions sans expression explicite. Toute suite croissante et majorée converge ; sa limite n'est pas nécessairement son majorant choisi.

Propriété – Lecture et conséquences

Pour une suite géométrique q^n, la limite vaut zéro si $|q| < 1$; elle vaut $+\infty$ si $q > 1$. Pour $q \leq -1$, les alternances empêchent généralement une limite finie.

Première lecture : application et méthode

Propriété – Lecture et conséquences

Si $u_{n+1} = u_n/2+3$, le point fixe vérifie $L = L/2+3$, donc $L = 6$. Poser $v_n = u_n - 6$ donne $v_{n+1} = v_n/2$. Ainsi $u_n = 6 + (u_0 - 6)2^{-n}$, qui converge vers six. Pour une récurrence non linéaire, prouver d'abord que les termes restent dans un intervalle invariant, puis étudier la monotonie. Une fois la convergence établie, la continuité peut permettre d'identifier la limite par une équation de point fixe.

Encadrement et intervalle invariant

Définition – Encadrement et intervalle invariant

Un intervalle est invariant par une fonction f si l'image de chacun de ses points reste dans cet intervalle. Si u_0 lui appartient et $u_{n+1} = f(u_n)$, une récurrence assure que tous les termes y restent. Cela fournit des bornes avant de parler de limite.

$$a \leq u_n \leq b \quad \Longrightarrow \quad a \leq f(u_n) \leq b.$$

Un point fixe est une solution de $f(L) = L$. Cette équation fournit des candidats à une limite ; elle ne démontre pas à elle seule la convergence.

Deux exemples résolus

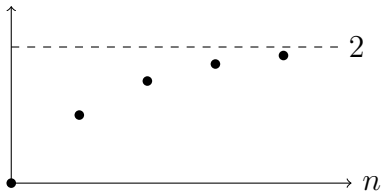
Exemple résolu – Une formule démontrée par récurrence

1. Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n+1$. On conjecture $u_n = 2^{n+1}-1$; au rang zéro, le membre droit vaut bien un.
2. Supposons la formule vraie au rang n. Alors $u_{n+1} = 2(2^{n+1}-1)+1 = 2^{n+2}-1$, soit la formule au rang suivant.
3. La récurrence est établie pour tout entier naturel. Comme 2^{n+1} tend vers $+\infty$, la suite diverge vers $+\infty$.

Exemple résolu – Converger sans formule explicite

1. Posons $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Si $0 \leq u_n \leq 2$, alors $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$: l'encadrement se transmet.
2. Sur $[0; 2]$, $2 + x - x^2 = (2 - x)(x + 1) \geq 0$, donc $\sqrt{2 + x} \geq x$. La suite est croissante et majorée par deux ; elle converge.
3. Par continuité, sa limite satisfait $L^2 = L + 2$. Les racines sont deux et moins un ; l'encadrement impose $L = 2$.

Une représentation pour comprendre



Une suite croissante sous son asymptote horizontale.

Les points représentent les premiers termes de $u_n = 2 - 2^{1-n}$. Ils montent vers la droite horizontale $y = 2$, sans jamais l'atteindre.

Le dessin illustre une convergence déjà déduite de la formule ; un nombre fini de points ne permettrait pas de la prouver. La monotonie de f et celle de la suite sont deux affirmations différentes.

Une fonction croissante permet de transmettre le signe de $u_{n+1} - u_n$, à partir d'une comparaison initiale.

Cela ne suffit pas à rendre toute suite récurrente croissante.

À retenir – Mini-bilan

Initialiser, transmettre, conclure. Pour une limite : prouver d'abord la convergence par formule, encadrement ou monotonie bornée ; identifier ensuite la valeur par un passage à la limite justifié.