

Chapitre 07 – Cours

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Établir existence et unicité d'une solution
- Relier continuité, monotonie et méthode numérique

Comprendre les notions

Continuité

Définition – Notion de départ

Une fonction est continue en a lorsque sa limite en a est égale à $f(a)$. Les fonctions usuelles sont continues sur leurs domaines ; sommes, produits et compositions de fonctions continues restent continues là où les expressions sont définies. Un quotient demande un dénominateur non nul. Une fonction dérivable en un point y est continue, mais la réciproque est fausse, comme le montre la valeur absolue en zéro.

Existence et unicité

Propriété – Lecture et conséquences

Le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'une fonction continue sur un intervalle prend toute valeur comprise entre deux de ses valeurs. Sur $[a; b]$, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution. La stricte monotonie ajoute l'unicité. Il faut donc rédiger séparément l'existence et l'unicité, sans attribuer cette dernière au seul changement de signe.

Première lecture : situation du chapitre

Propriété – Lecture et conséquences

Pour $f(x) = x^3 + x - 1$, on a $f(0)=-1$ et $f(1)=1$. Le polynôme est continu et sa dérivée $3x^2 + 1$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Il possède donc un seul zéro, situé entre zéro et un. Sans expression exacte simple, on peut en approcher la valeur par dichotomie. À chaque étape, calculer la valeur au milieu d'un intervalle dont les extrémités donnent des signes opposés, puis conserver la moitié gardant ce changement de signe. L'amplitude est divisée par deux.

Propriété – Lecture et conséquences

Une approximation numérique doit être présentée avec son encadrement ou sa précision, et non comme une valeur exacte de la solution.

Encadrer par dichotomie

Définition – Encadrer par dichotomie

Une dichotomie construit des intervalles emboîtés contenant une solution. Pour une fonction continue et des valeurs de signes opposés aux bornes, on teste le milieu et conserve une moitié gardant un changement de signe.

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Le milieu de l'intervalle final approche une racine avec une erreur au plus égale à sa demi-longueur. L'unicité nécessite un argument distinct ; sans elle, la dichotomie localise une racine parmi plusieurs possibles.

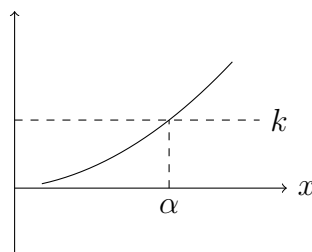
Deux exemples résolus

Exemple résolu – Une racine carrée encadrée

1. Pour $f(x) = x^2 - 2$ sur $[1; 2]$, la continuité et les signes -1 et deux assurent l'existence. La stricte croissance sur cet intervalle assure l'unicité.
 2. Au milieu $1,5$, $f = 0,25 > 0$: on conserve $[1; 1,5]$. Au milieu $1,25$, $f = -0,4375 < 0$: on conserve $[1,25; 1,5]$.
 3. La solution appartient à cet intervalle de longueur $0,25$; $1,375$ l'approche avec une erreur au plus $0,125$.
-

Exemple résolu – Pourquoi la continuité compte

1. Sur $[-1; 1]$, la fonction inverse donne $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$, donc des signes opposés aux extrémités.
 2. Pourtant $1/x = 0$ n'a aucune solution, puisque le numérateur est toujours un. Le théorème ne s'applique pas : la fonction n'est même pas définie en zéro.
 3. Il faut travailler sur un intervalle où la fonction est définie et continue en tout point. Un saut ou une valeur interdite peut faire passer du négatif au positif sans annulation.
-

Une représentation pour comprendre

Une valeur intermédiaire k possède ici un unique antécédent.

La courbe dessinée est continue et coupe la droite horizontale au niveau demandé. Les points situés de part et d'autre fournissent un encadrement. Une fonction continue pourrait néanmoins osciller et couper plusieurs fois cette droite : le dessin ne remplace donc pas l'étude de monotonie. Pour obtenir une précision donnée, la longueur initiale et le nombre de divisions suffisent. Partant d'une longueur un, dix étapes donnent une longueur $1/1024$, inférieure à 0,001.

Le milieu possède alors une erreur inférieure à 0,0005, à condition de conserver correctement le changement de signe.

À retenir – Mini-bilan

Continuité et valeurs aux bornes donnent l'existence. Stricte monotonie donne l'unicité. La dichotomie donne un encadrement contrôlé ; elle n'est pas une formule exacte pour la solution.
