Chapitre 09 – Cours

Logarithme népérien et croissance comparée

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Manipuler logarithmes et exponentielles
- Étudier des fonctions contenant ln

Comprendre les notions

Définition et propriétés

Définition – Notion de départ

La fonction logarithme népérien est la réciproque de l'exponentielle. Elle est définie sur $]0;+\infty[$ et vérifie $\ln(e^x) = x$, ainsi que $e^{\ln x} = x$ pour x positif. On a $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$. Pour a et b strictement positifs, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$ et $\ln(a^r) = r \ln a$ lorsque l'expression est définie. En revanche, aucune formule ne transforme une somme en somme de logarithmes.

Étude de la fonction

Propriété – Lecture et conséquences

La dérivée de ln est $1/x$: le logarithme est strictement croissant. Sa limite est $-\infty$ en zéro et $+\infty$ à l'infini. Pour un entier positif n, $\ln x/x^n$ tend vers zéro à l'infini, tandis que $x^n \ln x$ tend vers zéro en zéro positif. Ces croissances comparées lèvent certaines indéterminations.

Première lecture : Méthodes et application

Propriété – Lecture et conséquences

Pour résoudre une équation contenant des logarithmes, commencer par imposer la positivité de chaque argument, puis utiliser les propriétés et l'injectivité de ln. L'équation $\ln x + \ln(x+1) = \ln 2$ impose x positif, puis $x(x+1) = 2$. Ses racines algébriques sont

un et moins deux ; seule la première convient. Pour dériver $\ln(u(x))$, employer u'/u sur un intervalle où u est strictement positive. Une étude complète articule domaine, limites, dérivée et variations, avant de répondre à la question posée.

Un logarithme composé

Définition – Un logarithme composé

Pour une fonction u dérivable et strictement positive sur l'intervalle étudié, le logarithme composé se dérive en divisant sa dérivée par elle-même. La positivité est une condition d'existence, à traiter avant toute simplification.

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \qquad \ln a = \ln b \Longleftrightarrow a = b \quad (a, b > 0).$$

Une inéquation conserve son sens sous ln, car cette fonction est strictement croissante. Une division ultérieure par un logarithme négatif inverse en revanche le sens de l'inégalité.

Deux exemples résolus

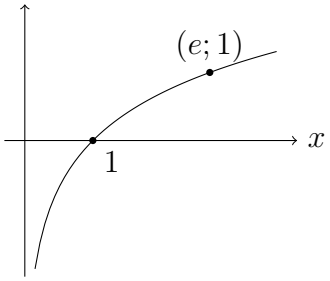
Exemple résolu – Résoudre une inéquation

1. Résolvons $\ln(x-1) \leq \ln 3$. Le domaine impose $x > 1$; on ne peut pas conserver les autres réels.
2. Par stricte croissance du logarithme, l'inégalité équivaut à $x - 1 \leq 3$, donc $x \leq 4$.
3. En croisant les deux contraintes, on obtient $]1\,;4]$. La borne un est exclue car le logarithme n'y existe pas ; quatre est incluse car l'inégalité est large.

Exemple résolu – Étudier un quotient logarithmique

1. Soit $f(x) = \ln x/x$ pour $x > 0$. La règle du quotient donne $f'(x) = (1 - \ln x)/x^2$.
2. Le dénominateur est positif. Le numérateur s'annule en e, reste positif avant e et devient négatif après : le maximum vaut $f(e) = 1/e$.
3. À l'infini, la croissance comparée donne $f(x) \to 0$. En zéro positif, $\ln x \to -\infty$ et $1/x \to +\infty$, donc $f(x) \to -\infty$.

Une représentation pour comprendre



La fonction logarithme : croissance lente et domaine strictement positif.

La courbe du logarithme passe par $(1;0)$ et $(e;1)$; elle monte en restant concave. Son asymptote verticale est l'axe des ordonnées. L'égalité $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ explique pourquoi des multiplications successives deviennent des additions. L'inégalité $\ln x \leq x - 1$ pour $x > 0$ découle de la concavité et de la tangente en un. Elle est globale, tandis qu'écrire $\ln(1+h) \approx h$ décrit une approximation près de zéro.

Confondre ces deux lectures ferait perdre soit le sens de l'inégalité, soit le domaine de validité de l'approximation.

À retenir – Mini-bilan

Toujours imposer des arguments positifs. Le logarithme transforme produits et puissances, mais pas les sommes. Pour les limites indéterminées, utiliser les croissances comparées ; pour les variations, le quotient u'/u.