Chapitre 11 – Corrections

Primitives et équations différentielles

20 exercices progressifs – Solutions détaillées

Exercice 1 – Primitives usuelles

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + C$. La condition $F(0) = 0$ impose $C = 0$. La dérivation permet de vérifier chaque terme.

Exercice 2 – Primitives usuelles

$F(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - x + C$. La condition $F(0) = 0$ impose $C = 0$. La dérivation permet de vérifier chaque terme.

Exercice 3 – Primitives usuelles

$F(x) = 1x^3 + x^2 - x + C$. La condition $F(0) = 0$ impose $C = 0$. La dérivation permet de vérifier chaque terme.

Exercice 4 – Primitives usuelles

$F(x) = \frac{4}{3}x^3 + x^2 - x + C$. La condition $F(0) = 0$ impose $C = 0$. La dérivation permet de vérifier chaque terme.

Exercice 5 – Primitives usuelles

$F(x) = \frac{5}{3}x^3 + x^2 - x + C$. La condition $F(0) = 0$ impose $C = 0$. La dérivation permet de vérifier chaque terme.

Exercice 6 – Condition initiale

Les solutions générales sont $y(x) = Ce^{1x}$. La condition initiale donne $C = 2$. Donc $y(x) = 2e^{1x}$ et $y' = 2e^{1x} = 1y$.

Exercice 7 – Condition initiale

Les solutions générales sont $y(x) = Ce^{2x}$. La condition initiale donne $C = 2$. Donc $y(x) = 2e^{2x}$ et $y' = 4e^{2x} = 2y$.

Exercice 8 – Condition initiale

Les solutions générales sont $y(x) = Ce^{3x}$. La condition initiale donne $C = 2$. Donc $y(x) = 2e^{3x}$ et $y' = 6e^{3x} = 3y$.

Exercice 9 – Condition initiale

Les solutions générales sont $y(x) = Ce^{4x}$. La condition initiale donne $C = 2$. Donc $y(x) = 2e^{4x}$ et $y' = 8e^{4x} = 4y$.

Exercice 10 – Condition initiale

Les solutions générales sont $y(x) = Ce^{5x}$. La condition initiale donne $C = 2$. Donc $y(x) = 2e^{5x}$ et $y' = 10e^{5x} = 5y$.

Exercice 11 – Équation affine

Une solution constante est $y_p = 1$. Les solutions sont $y(x) = 1 + Ce^{-2x}$. La condition initiale donne $C = -1$. Ainsi $y(x) = 1(1 - e^{-2x})$ et sa limite est 1.

Exercice 12 – Équation affine

Une solution constante est $y_p = 2$. Les solutions sont $y(x) = 2 + Ce^{-2x}$. La condition initiale donne $C = -2$. Ainsi $y(x) = 2(1 - e^{-2x})$ et sa limite est 2.

Exercice 13 – Équation affine

Une solution constante est $y_p = 3$. Les solutions sont $y(x) = 3 + Ce^{-2x}$. La condition initiale donne $C = -3$. Ainsi $y(x) = 3(1 - e^{-2x})$ et sa limite est 3.

Exercice 14 – Équation affine

Une solution constante est $y_p = 4$. Les solutions sont $y(x) = 4 + Ce^{-2x}$. La condition initiale donne $C = -4$. Ainsi $y(x) = 4(1 - e^{-2x})$ et sa limite est 4.

Exercice 15 – Équation affine

Une solution constante est $y_p = 5$. Les solutions sont $y(x) = 5 + Ce^{-2x}$. La condition initiale donne $C = -5$. Ainsi $y(x) = 5(1 - e^{-2x})$ et sa limite est 5.

Exercice 16 – Approfondissement — Modèle de refroidissement

$T(t) = 20 + 60e^{-1t}$. Sa dérivée est strictement négative pour $t \geq 0$. L'équation $T(t) = 50$ donne $e^{-1t} = 1/2$, donc $t = \ln 2/1$. La température reste supérieure à 20 et tend vers cette valeur.

Exercice 17 – Approfondissement — Modèle de refroidissement

$T(t) = 20 + 60e^{-2t}$. Sa dérivée est strictement négative pour $t \geq 0$. L'équation $T(t) = 50$ donne $e^{-2t} = 1/2$, donc $t = \ln 2/2$. La température reste supérieure à 20 et tend vers cette valeur.

Exercice 18 – Approfondissement — Modèle de refroidissement

$T(t) = 20 + 60e^{-3t}$. Sa dérivée est strictement négative pour $t \geq 0$. L'équation $T(t) = 50$ donne $e^{-3t} = 1/2$, donc $t = \ln 2/3$. La température reste supérieure à 20 et tend vers cette valeur.

Exercice 19 – Approfondissement — Modèle de refroidissement

$T(t) = 20 + 60e^{-4t}$. Sa dérivée est strictement négative pour $t \geq 0$. L'équation $T(t) = 50$ donne $e^{-4t} = 1/2$, donc $t = \ln 2/4$. La température reste supérieure à 20 et tend vers cette valeur.

Exercice 20 – Approfondissement — Modèle de refroidissement

$T(t) = 20 + 60e^{-5t}$. Sa dérivée est strictement négative pour $t \geq 0$. L'équation $T(t) = 50$ donne $e^{-5t} = 1/2$, donc $t = \ln 2/5$. La température reste supérieure à 20 et tend vers cette valeur.