

Chapitre 11 – Cours

Primitives et équations différentielles

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à :

- Rechercher une primitive
- Résoudre $y' = ay + b$ et utiliser une condition initiale

Comprendre les notions

L'opération inverse de la dérivation

Définition – Notion de départ

Une primitive F de f sur un intervalle I est une fonction dérivable vérifiant $F' = f$ sur I . Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante. Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives, sans qu'une expression utilisant des fonctions usuelles soit toujours disponible. On construit un tableau de primitives à partir des dérivées connues. Pour $m \neq -1$, une primitive de x^m sur un intervalle adapté est $x^{m+1}/(m+1)$.

Propriété – Lecture et conséquences

Celle de $1/x$ sur les positifs est $\ln x$. Pour une composition, reconnaître un facteur dérivé est essentiel : $u'e^u$ a pour primitive e^u .

Une fonction inconnue

Propriété – Lecture et conséquences

Une équation différentielle porte sur une fonction et ses dérivées. Les solutions de $y' = ay$ sont Ce^{ax} . Si a est non nul, celles de $y' = ay + b$ s'écrivent $-b/a + Ce^{ax}$. Lorsque a vaut zéro, on retrouve $y' = b$, dont les solutions sont $bx + C$. Une condition initiale détermine la constante et sélectionne une solution.

Première lecture : situation du chapitre

Propriété – Lecture et conséquences

Pour $y' = -2y + 6$, la solution constante trois sert de point d'appui. Toutes les solutions sont $y = 3 + Ce^{-2x}$. Si $y(0)=1$, $C=-2$: $y = 3 - 2e^{-2x}$. La substitution dans l'équation et la condition initiale vérifie le résultat. Dans un modèle temporel, l'étude de la variation et de la limite apporte une interprétation : ici la solution augmente vers trois sans dépasser cette valeur pour un temps positif.

Équilibre et condition initiale

Définition – Équilibre et condition initiale

Une solution d'équilibre est une fonction constante satisfaisant l'équation différentielle. Pour $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$, cet équilibre vaut $-b/a$; soustraire cette constante ramène à l'équation homogène.

$$z = y + \frac{b}{a} \implies z' = az.$$

La condition initiale fixe la constante multiplicative. Elle doit être imposée après l'écriture de la famille complète, afin de ne pas perdre de solutions ni confondre une valeur de fonction avec une dérivée.

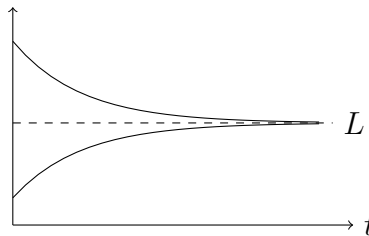
Deux exemples résolus

Exemple résolu – Reconnaître une primitive composée

1. Cherchons une primitive de $f(x) = 2xe^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$. La fonction intérieure $u(x) = x^2$ a pour dérivée $2x$.
 2. La règle $(e^u)' = u'e^u$ donne directement $F(x) = e^{x^2}$. Toutes les primitives s'écrivent $e^{x^2} + C$.
 3. Si l'on impose $F(0) = 4$, alors $1 + C = 4$ et $C = 3$. Une dérivation de $e^{x^2} + 3$ redonne exactement f .
-

Exemple résolu – Un refroidissement modélisé

1. Une température satisfait $T' = -0,2(T - 20)$ et $T(0) = 80$. L'équilibre est vingt ; posons $z = T - 20$.
 2. On obtient $z' = -0,2z$, puis $T(t) = 20 + Ce^{-0,2t}$. La condition initiale impose $C = 60$.
 3. Pour $t \geq 0$, la température décroît vers vingt et reste supérieure à vingt. L'équation donne une vitesse négative, compatible avec ce refroidissement.
-

Une représentation pour comprendre


Pour a négatif, les solutions se rapprochent de l'équilibre L .

Les deux courbes ont le même équilibre, mais des conditions initiales différentes. Celle qui part au-dessus descend ; celle qui part en dessous monte. Lorsque le coefficient a est négatif, la différence à l'équilibre est multipliée par une exponentielle décroissante. Le signe de a change le comportement : pour a positif, une différence initiale non nulle à l'équilibre grandit en valeur absolue quand le temps augmente.

Le vocabulaire de stabilisation ne s'applique donc pas à toutes les équations de cette forme. Dans le cas $a = 0$, on traite séparément la famille affine et on ne divise jamais par a .

À retenir – Mini-bilan

Une primitive se vérifie par dérivation. Une équation différentielle exige une famille de fonctions, puis une constante déterminée par les données. Distinguer équilibre, solution particulière, variation et limite temporelle.
